Matemaika A2 előadás

GTK NG&PSZ – 2025.tavasz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

22. előadás:
Hatványsorok. Taylor-sorok.

Hatványsor deriválása és integrálása

Tétel. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának belsejében a tagonkénti deriválásával kapott

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$$

hatványsor is konvergens ugyanazon az intervallumon és $f'(x)$-el egyezik meg.

Tétel. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciatartományának bármely belső $[a, b]$ intervallumában tagonként integrálható, azaz

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left[(x-x_0)^{n+1}\right]_a^b .$$

Függvényből hatványsor

Egy adott függvény felíható hatványsor alakban a Taylor-polinomok "kiterjesztésével". Keressük $p(x) = a_n(x - x_0)^n + \ldots + a_1(x - x_0) + a_0$ polinomot, illetve annak $a_0, a_1, ..., a_n$ együtthatóit, úgy hogy

$$p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0),\ p''(x_0) = f''(x_0), \ldots, p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$	$p(x_0) = a_0$	$a_0 := f(x_0)$
$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots$	$p'(x_0) = a_1$	$a_1 := f'(x_0)$
$p''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \ldots$	$p''(x_0) = 2a_2$	$a_2 := \frac{f''(x_0)}{2}$
$p'''(x) = 6a_3 + \ldots$	$p'''(x_0) = 6a_3$	$a_3 := \frac{f'''(x_0)}{6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p^{(n)}(x) = \ldots$	$p^{(n)}(x_0) = n!a_n$	$a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Definíció: Az f függvény n-ed rendű Taylor-polinomja az $x_0 \in D_f$ helyen, ha ott a függvény legalább n-szer deriválható:

$$T^n_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Példa

$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$, akkor

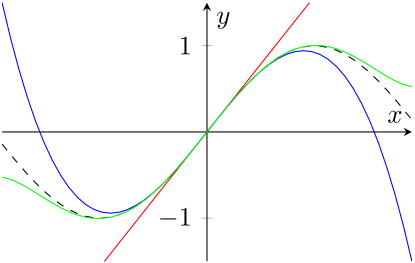
$T^1_{\sin,0}(x) = \cos(0)(x-0) + 0 = x, \quad$ (érintő)

$$T^2_{\sin,0}(x) = \frac{-\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = 0 \cdot x^2 + x + 0 = x,$$

$$T^3_{\sin,0}(x) = \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 - \frac{\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = \\ = -\frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0,$$

$T^4_{\sin,0}(x) = T^3_{\sin,0}(x),$

$T^5_{\sin,0}(x) = \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{3!}x^3 + x \quad$ stb.



Maclaurin-sor, Taylor-sor

Definíció. Legyen az $f(x)$ függvény az $x_0 \in D_f$ egy környezetében tetszőlegesen sokszor differenciálható, ekkor $f(x)$ **Taylor-sor**án a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

függvénysort értjük. Ha $x_0 = 0$, akkor a sor a függvény **Maclaurin-sora**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

A Taylor-sor felírása után ellenőrizzük, hogy a hatványsor konvergens-e és előállítja-e a megadott függvényt, mint határfüggvényt!

Példa

Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclauren-sorát.

Vizsgáljuk meg az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 < 1 \qquad \text{minden } x \in \mathbb{R}.$$

A hatványsor minden pontban konvergál, előállítja a függvény értékét, így

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots, \qquad e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.76666$$

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \sin(x)$ függvény Maclauren-sorát.

Vizsgáljuk az első néhány deriváltat:
$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \sin(x) & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos(x) & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin(x) & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos(x) & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin(x) & f^{(4)}(0) = 0
\end{array}
$$

Látható, hogy innentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Ennek a hatványsornak is a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, és elő is állítja a függvényt.

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \cos(x)$ függvény Maclauren-sorát.

Vizsgáljuk az első néhány deriváltat:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos(x), & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin(x) & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin(x) & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos(x) & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

Látható, hogy innentől kezdve periodikusan ismétlődnek a deriváltak és minden második 0, és ami nem 0, az ± 1 felváltva. Ebből felírható, hogy a Maclauren-sor:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots .$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara végtelen, azaz minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, és elő is állítja a függvényt.

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvény Maclauren-sorát.

A deriváltak vizsgálata nélkül tudjuk, hogy

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ... = \frac{1}{1-q}, \quad \text{ha } |q| < 1,$$

Mivel minden függvényhez csak egy Maclauren-sor tartozhat, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

hatványsor lesz a függvény Maclauren-sora.
Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara 1, és $x \in (-1, 1)$-re lesz csak konvergens a sor, azaz csak itt állítja elő a függvényt.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

Alapfüggvények Maclauren-sora

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots, \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall x \in (-1, 1)$

Taylor-és Maclauren-sorba fejtés

A megadott függvény adott pont körüli sorfejtéséhez a deriváltak vizsgálata helyett az alábbi technikákat használjuk:

- Átalakítás: algebrai átalakításokkal és/vagy a változók helyettesítésével visszavezetjük a megadott függvényt valamilyen ismert alapfüggvényre.
- Tagonkénti deriválás, integrálás: a megadott függvény deriváltja vagy integrálja valamilyen alapfüggvény, vagy arra algebrailag visszavezethető függvény, majd sorbafejtés után visszaintegráljuk/deriváljuk.

Minden sorfejtéshez hozzátartozik a konvergenciaintervallum megállapítása is, melyet az alapfüggvény konvergenciaintervallumából vezetünk le.

Példák

Fejtsük sorba az alábbi függvényeket az $x_0 = 0$ körül:

a) $f(x) = e^{3x}$ - az e^x Maclaurin-sorába $x = 3x$-t helyettesítve

$$e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8} + \dots,$$

ahol $3x \in \mathbb{R}$ esetén a sor konvergens, tehát $x \in \mathbb{R}$ esetén is az.

b) $g(x) = \cos(x^2)$ - a $\cos(x)$ Maclaurin-sorába $x = x^2$-t helyettesítve

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + \dots,$$

ahol $x^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, tehát minden valós számra konvergens.

c) $h(x) = \dfrac{1}{4+3x} = \dfrac{1}{4} \dfrac{1}{1 - \left(\frac{-3x}{4}\right)}$ - a geometriai sorba $\frac{-3x}{4}$-t írva

$$\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3x}{4}\right)^n = \frac{1}{4} - \frac{3x}{16} + \frac{9x^2}{64} - \dots = \frac{1}{4+3x}, \text{ ha}$$

$\left|-\dfrac{3x}{4}\right| < 1$, akkor $|x| < \dfrac{4}{3}$, azaz $x \in (-4/3, 4/3)$.

Példa

Fejtsük sorba az alábbi függvényeket az $x_0 = 0$ körül:

d) $$\frac{x^2}{4+x} = \frac{x^2}{4}\frac{1}{1+\frac{x}{4}} = \frac{x^2}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{x^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n = $$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^{n+2},$$

VAGY

$$\frac{x^2}{4+x} = x-4+\frac{16}{x+4} = x-4+\frac{4}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)} = x-4+4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n =$$
$$= x-4+4-x+4\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^{n+2},$$

ha $\left|-\frac{x}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$, azaz $x \in (-4, 4)$.

Példa

Fejtsük sorba az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényt a 0 körül. A sorfejtéshez a derivált függvényt fogjuk használni.

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, így

$$\int f'(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int (-1)^n x^n dx \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ ha } |-x| < 1, \text{ azaz } x \in (-1,1).$$

Sőt $x = 1$ esetén is konvergens (alternáló harmónikus sor).
Ekkor $x = 1$-re

$$\ln(1+1) = \ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

becslést adhatunk például $\ln(2)$ értékére.

Közelítések hatványsorok segítségével

Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln(2)$-öt.
Ehhez az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli sorfejtését használjuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ennek a sorfejtésnek a konvergenciaintervallumában benne van az 1.

Tétel. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, akkor

$$\left| S - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| < |a_{N+1}|,$$

tehát a közelítés hibáját mindig az összegezett tagok után következő elem abszolút értékével lehet felülről becsülni.

Tehát az $\ln(2)$ esetében a hiba

$$\left| \ln(2) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < \left| \frac{(-1)^{N+1}}{N+2} \right| = \frac{1}{N+2}.$$

Közelítések hatványsorok segítségével

Közelítsük meg alkalmas hatványsor segítségével az $\ln(2)$-öt.
Ehhez az $f(x) = \ln(1 + x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli sorfejtését használjuk az $x = 1$ helyen:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow \ln(1+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ennek a sorfejtésnek a konvergenciaintervallumában benne van az 1.

Hány tagig kell elmennünk, hogy az $\ln(2)$ értékét két tizedesjegy pontossággal megközelítsük?

Válasz: Ha a hiba felső becslése $\dfrac{1}{N+2}$ eleget tesz a fenti feltételnek, akkor a valódi hiba is. A két tizedesjegy pontosság azt jelenti, hogy

$$\left| \ln(2) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \right| < 10^{-2}, \text{ amiből } \frac{1}{N+2} < 10^{-2}, \text{ azaz } N > 98.$$

Példa

Fejtsük sorba az $f(x) = \arctan(x)$ függvényt a 0 körül. A sorfejtéshez a derivált függvényt fogjuk használni.

$$f(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

$$\int f'(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int (-1)^n x^{2n} dx\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ ha } |-x^2| < 1, \text{ azaz } x \in (-1,1).$$

Igazából $x = 1$-re visszakapjuk a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ sort, ami Leibniz-sor, tehát konvergens, ezért a sor konvergens, ha $x = 1$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \text{ ahol a hiba} < \frac{1}{9}.$$

Lagrange maradéktag

Definícío. Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében legalább N-szer differenciálható, ekkor $f(x)$ N-edfokú **Taylor-polinom**ján a

$$T_{f,\,x_0}^{N}(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

polinomot értjük.

Tétel. Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 egy környezetében legalább $N + 1$-szer differenciálható, ekkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(N+1)}(t)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1} = T_{f,\,x_0}^{N}(x) + L_{f,\,x_0}^{N}(t),$$

ahol $t \in (x_0, x)$ (vagy esetleg (x, x_0)) és $L_{f,\,x_0}^{N}(t)$ az úgynevezett **Lagrange-féle maradtéktag**.

Közelítés Taylor-polinommal

Az előző tétel értelmében tehát egy adott szám közelítéséhez használhatjuk a Taylor-polinomot és a hiba felülről becsülhető a Lagrange-féle maradéktaggal.

Közelítsük e értékét 3 tizedesjegy pontossággal. ($e \approx 2.71828$)

Használjuk az $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 0-körüli Taylor sorból az első N tagot és helyettesítsük be az x helyére az 1-et, ekkor

$$e \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}, \quad \text{és a hiba } \left|e - T^N_{e^x,0}(1)\right| = \left|L^N_{e^x,0}(t)\right|, \text{ ahol } t \in (0,1).$$

Becsüljük a hibát, ha $t \in (0,1)$

$$\left|L^N_{e^x,0}(t)\right| = \left|\frac{(e^x)^{(N+1)}(t)}{(N+1)!}(1-0)^{N+1}\right| = \frac{e^t}{(N+1)!} < \frac{3}{(N+1)!} < 10^{-3},$$

az $(N+1)! > 3000$ már $N = 6$-ra igaz ($7! = 5040$). Tehát

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} = 2,71805.$$