

1. Gyakorlat – Megoldások

Improprius integrálok

F1. (Impr.Integrál 1.típus) Számítsuk ki az alábbi első típusú improprius integrálokat:

$$(a) \int_3^{\infty} \frac{1}{(1-x)^3} dx, \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{6}{x^2+x-2} dx, \quad (c) \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx.$$

Megoldás [F1].

(a) Az 1. típusú improprius integrál határértékként felírva:

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{1}{(1-x)^3} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_3^c (1-x)^{-3} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-\frac{(1-x)^{-2}}{-2} \right]_3^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(1-c)^{-2}}{2} - \frac{(1-3)^{-2}}{2} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(b) Először az integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással. Mivel $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, így

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az A, B együtthatókat beszorzás után kapott egyenlet-rendszerből kapjuk:

$$6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$6 = (A+B)x + 2A - B,$$

amiből $A+B=0$, és $2A-B=6$. Ebből $A=2, B=-2$, és így

$$\int \frac{6}{x^2+x-2} dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2} dx = 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + C = 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{6}{x^2+x-2} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_2^c \frac{6}{x^2+x-2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right]_2^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} 2 \ln \left| \frac{c-1}{c+2} \right| - 2 \ln \left| \frac{2-1}{2+2} \right| = -2 \ln \left(\frac{1}{4} \right) = 4 \ln 2 \approx 2,77, \end{aligned}$$

mert

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c-1}{c+2} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{c}}{1 + \frac{2}{c}} = 1.$$

(c) Először az integrált számoljuk ki parciális integrálással:

$$\int x e^{-2x} dx = x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

Ezzel az improprius integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x e^{-2x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{c e^{-2c}}{2} - \frac{e^{-2c}}{4} - \left(-\frac{0 e^{-2 \cdot 0}}{2} - \frac{e^{-2 \cdot 0}}{4} \right) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \stackrel{\text{L'H}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0$$

a L'Hospital-szabály alkalmazásával.

F2. (Impr.Integrál 2.típus) Számítsuk ki az alábbi második típusú improprius integrálokat:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^4}} dx, \quad (b) \int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}} dx, \quad (c) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Megoldás [F2].

(a) A függvény 1-ben nem korlátos, így ott közelítjük:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{4}{3}}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{4}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3} \cdot (-1)} \right]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{\sqrt[3]{1-x}} \right]_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{\sqrt[3]{\varepsilon}} - \frac{3}{\sqrt[3]{1}} = \frac{3}{0^+} - 3 = \infty. \end{aligned}$$

Az integrál divergens, mert a határérték nem létezik.

(b) Itt a -2 -ben van „probléma”:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^0 6(4+2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{6(4+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_{-2+\varepsilon}^0 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 6(4+2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} - 6(4+2(-2+\varepsilon))^{\frac{1}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 6\sqrt{4} - 6\sqrt{2\varepsilon} = 12. \end{aligned}$$

(c) Először az integrálást végezzük el úgy, hogy egy alapfüggvény integráljára vezetjük vissza a feladatot. Ezután egyszerű helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Ennek ismeretében az improprius integrál (a függvény a 2-ben tart a végtelenhez):

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^{2-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arcsin\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

F3. Legyen $f_\lambda(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \in [0, \infty)$), ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Szemléltessük az f_λ függvényt $\lambda = 1$ és $\lambda = 2$ esetén, és mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0, \infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel egyenlő, azaz

$$\int_0^\infty f_\lambda(x) dx = 1 \quad \text{minden } \lambda > 0 \text{ számra.}$$

Megoldás [F3]. $f_1(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ illetve $f_2(x) = e^{-2x} = \frac{2}{e^{2x}}$ Látható, hogy $f_\lambda(0) = \lambda$, és $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\lambda = 0$. Ezek alapján ábrázolhatjuk a függvényeket még azt is felhasználva, hogy nagyobb λ esetén f_λ gyorsabban tart a 0-hoz. A deriváltból megállapíthatjuk, hogy pozitív λ esetén $f'_\lambda(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x} < 0$, ezért f_λ konkáv.

Az improprius integrál:

$$\int_0^\infty f_\lambda(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} [-e^{-\lambda x}]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} -e^{-\lambda c} - (-e^{-\lambda \cdot 0}) = 1.$$

F4. (Hf.) Számítsuk ki az improprius integrálokat:

$$(a) \int_4^\infty \frac{2}{(3x-1)^2} dx, \quad (b) \int_2^\infty e^{-5x} dx, \quad (c) \int_1^5 \frac{3}{\sqrt[4]{x-1}} dx.$$

Megoldás [F4]. (a) $\frac{2}{33}$ (b) $\frac{1}{5e^{10}}$ (c) $\sqrt{128}$