2. Gyakorlat – Megoldások
Komplex számok

F1. Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 1 - 3i$. Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}, \qquad \overline{z_1}, \qquad |z_1|.$$

Megoldás [F1]. A szorzásnál használjuk, hogy $i^2 = -1$, míg az osztásnál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (3 + 2i) + (1 - 3i) = (3 + 1) + (2 - 3)i = 4 - i,\\
z_1 - z_2 &= (3 + 2i) - (1 - 3i) = (3 - 1) + (2 - (-3))i = 2 + 5i,\\
z_1 z_2 &= (3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 9 - 7i,\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 2i}{1 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{3 + 9i + 2i + 6i^2}{1 + 3i - 3i - 9i^2} = \frac{-3 + 11i}{10} = -0.3 + 1.1i,\\
\overline{z_1} &= 3 - 2i,\\
|z_1| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.
\end{aligned}$$

F2. (Hf) Legyen $z_1 = 1 - 2i$ és $z_2 = 3 + i$, határozzuk meg $\dfrac{z_1 - \bar{z}_2}{z_1\, z_2}$ értékét.

Megoldás [F2]. $\dfrac{-2 - i}{5 - 5i} = -\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10}i$

F3. Legyen $z = -1 + i$. Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és a harmadik gyökeit.

Megoldás [F3]. A $z = -1 + i$ komplex szám abszolútértéke: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ és argumentuma:

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \to 45°, 135°; \quad \cos(\varphi) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \to 135°, 225°;$$

Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2}\,(\cos(135°) + i \sin(135°)).$$

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned}
z^4 &= \left(\sqrt{2}\right)^4 (\cos(4 \cdot 135°) + i \sin(4 \cdot 135°)) = 4\,(\cos(540°) + i \sin(540°)) =\\
&= 4\,(\cos(180°) + i \sin(180°)) = -4
\end{aligned}$$

A z komplex számnak három z_1, z_2, z_3 köbgyöke van:

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135^\circ}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(45^\circ\right) + i\sin\left(45^\circ\right)\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i,$$
$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135^\circ + 360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135^\circ + 360^\circ}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(165^\circ\right) + i\sin\left(165^\circ\right)\right),$$
$$z_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135^\circ + 720^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135^\circ + 720^\circ}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(285^\circ\right) + i\sin\left(285^\circ\right)\right).$$

F4. (Hf) Számoljuk ki az $\sqrt{3} - i$ komplex szám tizenegyedik hatványát (az eredményt algebrai alakban adjuk meg).
Megoldás [F4]. $2^{11}(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 1024\sqrt{3} + 1024i.$

F5. Keressük meg a $z^4 - z^2 - 6 = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

Megoldás [F5]. Ennek a bújtatott másodfokú egyenletnek, $a^2 - a - 6 = 0$ két valós(egész) gyöke van, ezért $a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2)$, így az $a = 3$ és $a = -2$ a megoldásai. Ebből

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{3}, \quad \text{és} \quad z_{3,4} = \sqrt{-2} = \sqrt{2(\cos(\pi) + i\sin(\pi))} = \sqrt{2}(\cos(\pi/2+k\pi) + i\sin(\pi/2+k\pi)) = \pm i\sqrt{2}.$$

F6. Keressük meg a $z^3 + 2z^2 + 3z = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében, és írjuk fel gyöktényezős alakban.
Megoldás [F6]. A polinomból a z kiemelhető azaz az egyik gyöke 0, $z_1 = 0$. Ekkor $z^3 + 2z^2 + 3z = z(z^2 + 2z + 3) = 0$, A másodfokú tag gyökei a megoldóképlet alapján:

$$z_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Így a polinom gyöktényezős alakja:

$$z^3 + 2z^2 + 3z = z(z + 1 - i\sqrt{2})(z + 1 + i\sqrt{2}).$$

F7. (Hf) Keressük meg a $z^2 - 2z + 5 = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében.
Megoldás [F7]. $z = 1 \pm 2i$