

4. Gyakorlat - Megoldások

Lineáris összefüggőség, bázis, altér, dimenzió, mátrixok műveletei

F1. Döntsük el, hogy a következő \mathbb{R}^3 -beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy sem:

$$a) \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}; \quad b) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Megoldás [F1]. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

(a) Az egyenlet,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1$, melyet a másik két egyenletbe írva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az első (-3) -szorososa, nem ad új információt. Ennek egy (nem nulla) megoldása például a $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = -1$. Ekkor $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 3$. Ellenőrizhető, hogy ez az eredeti egyenletrendszer megoldása is, azaz

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mely mutatja, hogy ezen vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz lineárisan összefüggők.

(b)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0.$$

A harmadik egyenletből az első egyenlet kétszeresét kivonva kapjuk, hogy $-\lambda_2 = 0$, azaz $\lambda_2 = 0$. A második egyenletből $2\lambda_3 = 0$, azaz $\lambda_3 = 0$. Ekkor az első egyenletet felhasználva kapjuk, hogy $\lambda_1 = 0$. Tehát $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ami azt jelenti, hogy ezen vektorok lineárisan függetlenek.

F2. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is! Végezzünk el a $\mathbf{D}^T\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}^T\mathbf{D}$ szorzásokat, mit mondhatunk az eredményekről?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás [F2]. Az $m \times l$ -es és az $n \times k$ -as mátrixokat pontosan akkor tudjuk összeszorozni, ha $l = n$. Mivel az \mathbf{A} mátrix 2×2 -es, a \mathbf{B} 3×2 -es, a \mathbf{C} 2×3 -as, és a \mathbf{D} 3×1 -es, így az \mathbf{AC} , \mathbf{BA} , \mathbf{BC} , \mathbf{CB} , \mathbf{CD} szorzatok értelmesek. Ezek eredménye:

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ -4 & -2 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -10 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{CB} = \begin{pmatrix} -2 & 18 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A mátrixok transzponáltjai:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{D}^T \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T (\mathbf{D}^T)^T = \mathbf{B}^T \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^T \mathbf{B} = (1, 3).$$

F3. (Hf) Adva van

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixműveletek eredményét, ha lehetséges:

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{v}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad 3\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{B}^4.$$

$$\text{Megoldás [F3].} \quad \mathbf{A} + 3\mathbf{v} = \text{n.é.}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = 50, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 18 \\ 34 \\ 42 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \text{n.é.}, \quad 3\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{B} = (9, 24, 45), \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \text{n.é.}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -12 & 40 \\ -12 & 72 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 9 \\ 15 & 25 & 27 \\ 23 & 27 & 31 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

F4. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az alábbi \mathbf{A} mátrix a_{ij} eleme jelentse az i -edik gyárban egy nap alatt előállított j -edik termék számát. Továbbá a \mathbf{p} vektor j -edik komponense jelölje a j -edik termék egységárát.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Mekkora az egy nap alatt előállított termelési érték gyáranként?
- Mi az $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$ szorzat eredménye, ahol \mathbf{e}_i az \mathbb{R}^4 vektortér természetes bázisának i -edik egységvektora? Mit jelent az eredmény?
- Mik lesznek a komponensei az $\mathbf{1}^T \mathbf{A}$ szorzat eredményvektorának, ahol $\mathbf{1}$ az a vektor, melyre a szorzás végrehajtható, és minden koordinátája 1? Mi az eredmény jelentése?
- Írjuk fel mátrixszorzás segítségével a gyárakra az általuk termelt termékek összmenyiségét!

Megoldás [F4].

(a) $\mathbf{A} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 450 \\ 290 \\ 740 \end{pmatrix}$ mátrixszorzat eredményében az első koordináta az első gyárban a

megfelelő egységárral vett termékmennyiségek szorzatainak összege, azaz az első gyár által termelt érték: $4 \cdot 40 + 0 \cdot 60 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 20 = 450$. A második koordináta hasonlóan a második gyárra vonatkozó összérték. Az $\mathbf{A} \mathbf{p}$ szorzat koordinátái megadják az egyes gyárak által termelt értékeket.

(b) Ha $i = 1$ $\mathbf{A} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ az \mathbf{A} mátrix első oszlopa, megadja, hogy az első termékből

melyik gyár hányat gyárt egy nap alatt. Hasonlóan $i = 2, 3, 4$.

(c) $(1, 1, 1) \cdot \mathbf{A} = (11, 7, 10, 6)$, minden koordinátájában az \mathbf{A} mátrix oszlopelemeinek összege szerepel, azaz megadja, hogy egy nap alatt az egyes termékekből összesen mennyi készül.

(d) $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$ szorzat eredményvektorában most \mathbf{A} sorösszegei szerepelnek, ami az

egy gyárban egy nap alatt előállított összes termékek számát adja meg.

F5. (Hf) Egy kereskedelmi cég 4 féle terméket forgalmaz 5 boltjában. Az alábbi \mathbf{A} mátrix a_{ij} eleme jelentse a j -edik termék i -edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét, a \mathbf{p} vektor p_j komponense jelölje az j -edik termék egységárát.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 35 & 11 \\ 22 & 10 & 31 & 0 \\ 15 & 16 & 32 & 14 \\ 101 & 110 & 180 & 200 \\ 5 & 12 & 21 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Az \mathbf{A} mátrix, a \mathbf{p} vektor, az \mathbf{e}_i (a természetes bázis vektorai), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel mátrixműveletek eredményeként a következő mennyiségeket.

(a) Számítsuk ki a havi bevételt boltonként. Melyik bolt bonyolította a legnagyobb forgalmat?

(b) Számítsuk ki az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként. Melyik termék volt a legkelendőbb, és mennyit adtak el belőle?

(c) Számítsuk ki a 4-dik boltban eladott termékek számát.

(d) Számítsuk ki a cég havi összbevételét.

Megoldás [F5].

(a) Az $\mathbf{A}\mathbf{p} = (950, 1250, 1770, 14320, 1085)^T$ szorzat eredményvektorának a komponensei adják meg az egyes boltok bevételeit, így a legnagyobb forgalom a 4. boltban volt.

(b) $\mathbf{1}^T\mathbf{A} = (157, 148, 299, 232)$. A 3. termékből adták el a legtöbbet, 299 darabot.

(c) $\mathbf{e}_4\mathbf{A}\mathbf{1} = 591$

(d) $\mathbf{1}^T\mathbf{A}\mathbf{p} = 19330$.