7. Gyakorlat - Megoldások
Gauss-Jordan módszer, paraméteres lineáris egyenletrendszerek

F1. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \phantom{{}-2x_5} &= 2\\
9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5\\
x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} - x_4 + 2x_5 &= 1\\
x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2
\end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Megoldás [F1].

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2\\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{s_1\leftrightarrow s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5\\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} s_2-9s_1\\ \sim\\ s_3-3s_1\\ s_4-s_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4\\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{s_2\leftrightarrow s_4}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1\\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} s_3-2s_2\\ \sim\\ s_4-5s_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 18 & -30 & -9 \end{array}\right) \overset{s_4-3s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is $3 < 5$ a változók száma, ezért $5 - 3 = 2$ változó szabadon választható, legyen ez x_4 és x_5. A harmadik egyenlet szerint $x_3 = -3-6x_4+10x_5$. A második szerint $2x_2 = 1 - 2x_5 + 2x_4 + x_3 = 1 - 2x_5 + 2x_4 - 3 - 6x_4 + 10x_5 = -2 + 8x_5 - 4x_4$, ezért $x_2 = -1 + 4x_5 - 2x_4$. Az első egyenlet szerint $x_1 = 1 + x_2 + x_4 - 2x_5$, azaz $x_1 = 1 - 1 + 4x_5 - 2x_4 + x_4 - 2x_5 = 2x_5 - x_4$.

F2. Határozzuk meg a paraméter függvényében az egyenletrendszerek megoldását!

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= a \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} 3x - 2y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ y + b\,z &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás [F2].

(a) A megszokott módon az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & -1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_1 \longleftrightarrow \mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & a \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3 - 5\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2 - 2\mathbf{s}_1}{\sim}}$$

$$\underset{\mathbf{s}_3 - 5\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2 - 2\mathbf{s}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & a \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3 - 2\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right)$$

- $a \neq 2$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2 < \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ nincs megoldás.
- $a = 2$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < 4$ végtelen sok megoldás van (két szabad változó), ekkor a megoldáshalmaz $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, $x_2 = 1/7 - 16/7x_3 + 12/7x_4$, $x_1 = 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 3/7 - 6/7x_3 + 1/7x_4$.

(b)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{array}\right) \underset{(-1)\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_1 \longleftrightarrow \mathbf{s}_2}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2 - 3\mathbf{s}_1}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_2 - 3\mathbf{s}_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_2}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & b-4 & 0 \end{array}\right)$$

- $b \neq 4$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ egy darab egyértelmű megoldás van. Ez éppen a triviális megoldás lesz $x = y = z = 0$.
- $b = 4$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < 3$ végtelen sok megoldás van (egy szabad változó), ekkor a megoldáshalmaz $z \in \mathbb{R}$, $y = -4z$, $x = y + z = -4z + z = -3z$.

F3. Határozzuk meg a paraméter függvényében az egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{aligned} -x_1 \phantom{{}+2x_2} - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 \phantom{{}+2x_2+x_3} + c\,x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás [F3].

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & c & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathbf{s}_2+3\mathbf{s}_1 \\ \sim \\ s_3+\mathbf{s}_1 \\ s_4+3\mathbf{s}_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2\leftrightarrow\mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3+2\mathbf{s}_2}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_3+2\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3/(-5)}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & c+3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_4+6s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-9 & 0 \end{array}\right)$$

Ha $c \neq 9$, akkor csak egy darab egyértelmű megoldás van, ez a triviális megoldás $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Ha $c = 9$, akkor lentről olvasva az egyenleteket $x_3 = 2x_4$, $x_2 = -x_4$ és $x_1 = -2x_3 + x_4 = -4x_4 + x_4 = -3x_4$.

Opcionális(ha marad idő)

F4. Határozzuk meg a paraméterek függvényében az egyenletrendszer megoldásainak számát! Mikor nincs megoldás?

$$3x + 5y - z = 1$$
$$x + a\,y + 2z = 2$$
$$x + 9y - 5z = b$$

Megoldás [F4]. Ha $a = -2$, de $b \neq -3$, akkor nincs megoldás. Ha $a = -2$ és $b = -3$, akkor végtelen sok megoldás van. Ha $a \neq -2$, akkor b értékétől függően pontosan egy megoldás van.