

8. Gyakorlat - Megoldások

Sajátértékek, sajátvektorok, diagonalizálás

F1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$(a) \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás [F1]. (a) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -6 \\ 3 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)(-4 - \lambda) + 3 \cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2,$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 2$.

Egy λ sajátértékhez a sajátvektort az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a $\lambda_1 = -1$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $x = y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

$\lambda_2 = 2$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $x = 2y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \neq 0.$$

(b) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= (-1 - \lambda)((-\lambda)(2 - \lambda) - 2) + 1 \cdot (-2 - 2\lambda) = \\ &= (-1 - \lambda)(-\lambda^2 + 2\lambda) = (-1 - \lambda)\lambda(2 - \lambda), \end{aligned}$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 2$.

Egy λ sajátértékhez a sajátérvektort az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a $\lambda_1 = -1$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} -2y - 2z = 0, \\ y + z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0. \end{array}$$

Tehát $y = -z$, ezért $x = -2y - 3z = 2z - 3z = -z$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} -x - 2y - 2z = 0, \\ z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{array}$$

Tehát $z = 0$, és $x = -2y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_3 = 2$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} -3x - 2y - 2z = 0, \\ -2y + z = 0, \\ x + 2y = 0. \end{array}$$

Tehát $x + z = 0$, $z = -x$, ezért $-x - 2y = 0$, $y = -\frac{1}{2}x$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \\ -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

F2. Adjunk meg a mátrixokhoz tartozó sajátvektorokból álló bázist, majd diagonalizáljuk a mátrixot.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F2].

(a) A sajátértékek $(2 - \lambda)(-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ megoldásai, azaz $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 3$.

$\lambda_1 = -1$ esetén a sajátvektorok

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Tehát } x = y. \text{ Így } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

$\lambda_2 = 3$ esetén a sajátvektorok

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Tehát } x = -3y. \text{ Így } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \neq 0.$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ennek a bázisnak a bázisváltó mátrixa:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ melynek inverze } \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}. \text{ Így a diagonalizáció}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 \\ -3/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & -3 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -3 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 9) = (1 - \lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 4).$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ és $\lambda_3 = 4$.

A sajátvektorok $\lambda_1 = 1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rcl} -3z & = & 0, \\ 0 & = & 0, \\ -3x & = & 0. \end{array}$$

Tehát $x = z = 0$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = -2$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rcl} 3x & - & 3z = 0, \\ & 3y & = 0, \\ -3x & + & 3z = 0. \end{array}$$

Így $y = 0$, és $z = x$, tehát a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 4$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rcl} -3x & - & 3z = 0, \\ & - & 3y = 0, \\ -3x & - & 3z = 0. \end{array}$$

Tehát $x + z = 0$, $z = -x$ és $y = 0$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ortonormált bázis adható meg

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ezért a bázisváltó mátrix könnyen invertálható

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ekkor a diagonális alak

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

F3. (Hf) Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Adjunk meg a sajátvektorokból álló bázist, diagonalizáljuk a mátrixokat.

$$(a) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F3]. (a) A sajátértékek az átlóelemek: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$.

Sajátvektorok: $\lambda_1 = -1, \mathbf{s} = (x, 0)$, ha $x \neq 0$,
 $\lambda_2 = 4, \mathbf{s} = (3x, 5x)$, ha $x \neq 0$.

Sajátvektorokból álló bázis például: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$, azaz $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) A sajátértékek: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

Sajátvektorok: $\lambda_1 = -1, \mathbf{s} = (x, 0, x)$, ha $x \neq 0$,
 $\lambda_2 = 1, \mathbf{s} = (x, x, x)$, ha $x \neq 0$,
 $\lambda_3 = 2, \mathbf{s} = (-y, y, 0)$, ha $y \neq 0$.

Sajátvektorokból álló bázis például: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, azaz $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) A sajátértékek: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$.

Sajátvektorok: $\lambda_1 = 0, \mathbf{s} = (x, 0, -2x)$, ha $x \neq 0$,
 $\lambda_2 = 2, \mathbf{s} = (0, y, 0)$, ha $y \neq 0$,
 $\lambda_3 = 5, \mathbf{s} = (2z, 0, z)$, ha $z \neq 0$.

Sajátvektorokból álló orthonormált bázis például: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$,

$$\text{azaz } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Opcionális(ha marad idő)

F4. Az alábbi mátrix mely sajátértékéhez tartozik a $(3, 0, -2)$ sajátvektor?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás [F4]. A $\lambda = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.