

## 10. Gyakorlat - Megoldások

### Lokális szélsőértékek

**F1.** Írjuk fel az  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + 2yz, \sqrt{x} + \ln(z))$  függvény  $(4, 3, 1)$  pontbeli Jacobi-mátrixát.

**Megoldás [F1].** Az  $\mathbf{f}$  függvény komponensfüggvényei:

$$f_1(x, y, z) = x + 2yz$$

$$f_2(x, y, z) = \sqrt{x} + \ln(z)$$

A Jacobi-mátrix ezen függvények parciális deriváltjaiból áll: a sorokban a megfelelő komponens függvények parciális deriváltjai, míg az oszlopokban a megfelelő változó szerinti parciális deriváltak vannak. Például a Jacobi-mátrix első sorának második eleme az első komponensfüggvény második változó szerinti parciális deriváltja, azaz  $f'_{1y}(x, y, z) = 2z$ . Így a Jacobi-mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2z & 2y \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}.$$

Ez a  $(4, 3, 1)$  pontban a következő:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**F2.** Legyen  $f(x, y) = 3x^2y$ , és  $x(t) = \sin(t)$ ,  $y(t) = \ln(t)$ . Határozzuk meg az  $f(x(t), y(t))$  függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

**Megoldás [F2].** Az  $f$  függvény Jacobi-mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \end{pmatrix}$$

Míg a  $\mathbf{g} : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin(t), \ln(t))$  függvény Jacobi-mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Az  $f \circ \mathbf{g}$  összetett függvény deriváltja a láncszabály szerint  $(f \circ \mathbf{g})'(t) = f'(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)$ , ez az esetünkben:

$$(f \circ \mathbf{g})'(t) = f'(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} 6 \sin(t) \ln(t), & 3 \sin^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = 6 \sin(t) \ln(t) \cos(t) + \frac{3 \sin^2(t)}{t}.$$

**F3.** Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit!

(a)  $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$ ,

(b)  $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$ ,

(c)  $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$ .

**Megoldás [F3].** (a) Először kiszámoljuk a függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$f'_x(x, y) = 8x + 2y$$

$$f'_y(x, y) = 2x + 10y$$

A következő lépés, hogy megkeressük azokat a pontokat (stacionárius pontok), ahol mindkét parciális derivált nulla:

$$8x + 2y = 0$$

$$2x + 10y = 0$$

Az elsőből  $y = -4x$ , melyet a második helyettesítve  $-38x = 0$ , azaz  $x = 0$ , amiből  $y = 0$ . (Hivatkozhattunk volna arra is, hogy ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, melynek az együtthatómátrixának a determinánsa nem nulla, így csak az azonosan 0 a megoldás.) Tehát egyetlen stacionárius pont van, a  $(0, 0)$ . Még meg kell nézni, hogy ez valóban lokális szélsőérték-e, amihez a Hesse-féle determinánst kell felírni a másodrendű parciális deriváltakból.

$$f''_{xx}(x, y) = 8$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2$$

$$f''_{yy}(x, y) = 10$$

Ebből a Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 8 \cdot 10 - 2^2 = 76,$$

ami minden pontban pozitív, így a  $(0, 0)$  valóban lokális szélsőérték, és mivel  $f''_{xx}(x, y) = 8$  pozitív, így lokális minimum. A lokális minimum értéke:  $f(0, 0) = 2$ .

(b) Ugyanazokat a lépéseket kell megcsinálnunk, mint az (a) feladatban:

$$f'_x(x, y) = 2xy + 2y$$

$$f'_y(x, y) = 4y^3 - 3 + x^2 + 2x$$

A stacionárius pontok a következő egyenleteket kielégítő pontok:

$$\begin{aligned}2xy + 2y &= 0 \\4y^3 - 3 + x^2 + 2x &= 0\end{aligned}$$

Az első egyenletet szorzattá alakíthatjuk:  $2y(x + 1) = 0$ , amiből  $y = 0$  vagy  $x = -1$ . Az  $y = 0$  esetben a második egyenlet  $-3 + x^2 + 2x = 0$ , aminek a két gyöke 1 és  $-3$ . Az  $x = -1$  esetben a második egyenlet  $4y^3 - 3 + 1 - 2 = 0$ , azaz  $y^3 = 1$ , azaz  $y = 1$ . Tehát három stacionárius pont van:  $(1, 0)$ ,  $(-3, 0)$  és  $(-1, 1)$ . A Hesse-determinánshoz a másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y) &= 2y \\f''_{xy}(x, y) &= 2x + 2 \\f''_{yy}(x, y) &= 12y^2\end{aligned}$$

Ebből a Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 2y \cdot 12y^2 - (2x + 2)^2 = 24y^3 - (2x + 2)^2$$

Minden stacionárius pontra kiszámoljuk ezt:

Az  $(1, 0)$  pontban:  $24 \cdot 0 - (2 + 2)^2 = -16$ , ami negatív, tehát ez nem lokális szélsőérték (nyeregpon).t)

A  $(-3, 0)$  pontban:  $24 \cdot 0 - (2 \cdot (-3) + 2)^2 = -16$ , ami negatív, tehát ez sem lokális szélsőérték (nyeregpon).t)

A  $(-1, 1)$  pontban:  $24 \cdot 1^3 - (2 \cdot (-1) + 2)^2 = 24$ , ami pozitív, így ez lokális szélsőérték. Mivel  $f''_{xx}(-1, 1) = 2$ , ami pozitív, ez lokális minimum. A lokális minimum értéke:  $f(-1, 1) = 1 - 3 + 1 - 2 = -3$ .

(c) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= 2 - 2x \\f'_y(x, y) &= 2 - e^y\end{aligned}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$\begin{aligned}2 - 2x &= 0 \\2 - e^y &= 0\end{aligned}$$

Ezekből  $x = 1$ , és  $y = \ln(2)$ . Tehát az egyetlen stacionárius pont az  $(1, \ln(2))$ .

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y) &= -2 \\f''_{xy}(x, y) &= 0 \\f''_{yy}(x, y) &= -e^y\end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = (-2) \cdot (-e^y) - 0^2 = 2e^y,$$

ami az  $(1, \ln(2))$  pontban  $2 \cdot 2 = 4$ , ami pozitív. Mivel  $f''_{xx}(1, \ln(2)) = -2$  negatív, így ez lokális maximum. A lokális maximum értéke:

$$f(1, \ln(2)) = 2 + 2 + 2 \ln(2) - 1 - 2 = 1 + 2 \ln(2).$$

**F4. (Hf)** Határozzuk meg az  $f(x, y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  függvény lokális szélsőértékeit.

**Megoldás [F4].**  $(3, 3)$ -ban lokális minimum, értéke 1.

**F5.** Egy  $V = 4,5 \text{ dm}^3$  térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsinetet kelljen felhasználni?

**Megoldás [F5].** Legyen a téglatest oldalhosszai  $a, b, c$  (deciméterben mérve). Ekkor a térfogat  $abc = 4,5$ , amiből  $c = \frac{4,5}{ab}$ . Ha  $a$  a leghosszabb oldal, akkor ha hosszában kötjük át a csomagot, akkor annak a hossza  $2(a + b)$ , és ha keresztben, akkor  $2(b + c)$ . Mivel keresztben kétszer kötjük át, így összesen

$$2(a + b) + 2 \cdot 2(b + c) = 2a + 6b + 4c$$

zsineg szükséges. Felhasználva, hogy  $c = \frac{4,5}{ab}$ , a

$$f(a, b) = 2a + 6b + 4c = 2a + 6b + 4 \cdot \frac{4,5}{ab} = 2a + 6b + \frac{18}{ab}$$

függvényt kell minimalizálni. Ezt az eddigi módszerrel tehetjük meg (annyi különbséggel, hogy most a változókat  $a, b$ -vel jelöljük). Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_a(a, b) &= 2 - \frac{18}{a^2b} \\ f'_b(a, b) &= 6 - \frac{18}{ab^2} \end{aligned}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{18}{a^2b} &= 0 \\ 6 - \frac{18}{ab^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ezekből  $a^2b = 9$  és  $ab^2 = 3$ . Ekkor  $a^3b^3 = 27$ , amiből  $ab = \sqrt[3]{27} = 3$ . Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{9}{3} = 3, \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{3}{3} = 1, \quad c = \frac{4,5}{ab} = \frac{3}{2} = 1,5$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$\begin{aligned}f''_{aa}(a, b) &= \frac{36}{a^3b} \\f''_{ab}(a, b) &= \frac{18}{a^2b^2} \\f''_{bb}(a, b) &= \frac{36}{ab^3}\end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a, b)f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{36}{a^3b} \cdot \frac{36}{ab^3} - \left(\frac{18}{a^2b^2}\right)^2 = \frac{36^2 - 18^2}{a^4b^4},$$

ami pozitív (mivel  $a, b$  pozitív). Mivel  $f''_{aa}(3, 1)$  is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó csomaghoz kell a lehető legkevesebb zsineg.

**F6.** Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata  $1 \text{ m}^3$ . Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

**Megoldás [F6].** Jelölje a téglatest oldalait  $a, b, c$  méterben mérve. Így a térfogat  $abc = 1$ , amiből  $c = \frac{1}{ab}$ . Ha  $a$  a magasság, akkor az alaplapp területe  $ab$ , míg az oldallapoké  $ac$ , illetve  $bc$ . Mivel két-két ugyanolyan oldallap van, így a felhasznált anyag:

$$f(a, b) = ab + 2ac + 2bc = ab + 2a\frac{1}{ab} + 2b\frac{1}{ab} = ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}$$

Ennek elsőrendű parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned}f'_a(a, b) &= b - \frac{2}{a^2} \\f'_b(a, b) &= a - \frac{2}{b^2}\end{aligned}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$\begin{aligned}b - \frac{2}{a^2} &= 0 \\a - \frac{2}{b^2} &= 0\end{aligned}$$

Ezekből  $a^2b = 2$ , és  $ab^2 = 2$ . Ekkor  $a^3b^3 = 4$ , amiből  $ab = \sqrt[3]{4}$ . Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad c = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$\begin{aligned}f''_{aa}(a, b) &= \frac{4}{a^3} \\f''_{ab}(a, b) &= 1 \\f''_{bb}(a, b) &= \frac{4}{b^3}\end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a, b)f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{4}{a^3} \frac{4}{b^3} - 1,$$

ami a  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$  pontban  $3 > 0$ . Mivel  $f''_{aa}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = \frac{4}{(\sqrt[3]{2})^3} = 2$  is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó téglatesthez kell a lehető legkevesebb anyag.

**F7. (Hf)** Egy  $1 \text{ m}^3$  térfogatú téglatest alját és tetejét két rétegben, a többi oldalát egy rétegben befestjük. Milyen hosszúak legyenek a téglatest oldalélei, hogy a lehető legkevesebb festék kelljen ehhez?

**Megoldás [F7].** Ha  $a, b, c$  jelöli az oldalakat, akkor  $abc = 1$  és a festett felület nagysága:

$$4ab + 2bc + 2ac = 4ab + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}.$$

A parciális deriváltak eltűnéséből  $a = b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  és  $c = \sqrt[3]{4}$ . A Hesse-determináns ebben az esetben pozitív, így ez lokális szélsőérték, és mivel  $f''_{aa}$  pozitív, így lokális minimum.

## Opcionális(ha marad idő)

**F8.** A  $z = 2x^2 + y^2$  felület és a  $z = 5$  sík által határolt térrészbe a lehető legnagyobb térfogatú hasábot írjuk. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?