Konzultáció P0 kurzus 2024.05.27.

1. vizsga 3 fel.

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3\times 3 \;\vdots\; \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} 3\times 2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \backslash \qquad \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}$$

$$\underbrace{\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}$$

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}$$

$\underline{\underline{A}}$ invertálható, ha négyzetes és $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \begin{vmatrix} \overset{+}{4} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-1} \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (4-1) - 0 \ldots + (-1)(0-(-8)) = 12 - 8 = 4$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \cdot \left(\operatorname{adj} \underline{\underline{A}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc}
x & y & z & \text{jobb.o.} \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
4 & 1 & -3 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 \\
2 & 3 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

isn. ① vezéregyes a_{ii} elem helyein
② a_{ii} alatti elemek nullázása

① : csere vagy osztás vagy sorok kivonása/összeadása

② : "vezérsor" kivonása / hozzáadása az alatta lévő sorokhoz úgy hogy vezérelem alatt 0-ák legyenek

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
4 & 1 & -3 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 \\
2 & 3 & -1 & 0
\end{array}\right)
\overset{①\; s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 \\
\cancel{4} & 1 & -3 & 0 \\
\cancel{2} & 3 & -1 & 0
\end{array}\right)
\underset{s_3 - 2s_1}{\overset{s_2 - 4s_1}{\sim}}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 5 & -7 & 0 \\
0 & \cancel{5} & -3 & 0
\end{array}\right)
\overset{s_3 - s_2}{\sim}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 5 & -7 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\int_0^{3} \frac{2}{\sqrt{3-x}}\,dx =$$

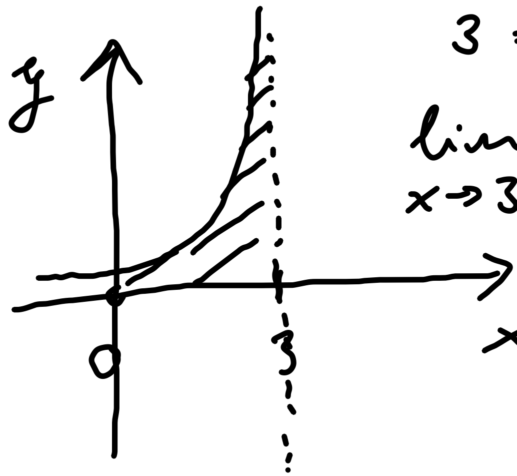
$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$$

- $3-x \geq 0$

  $3 \geq x$
- $3-x \neq 0$

  $3 \neq x$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{2}{\sqrt{3-x}}\,dx =$$



$$\lim_{x \to 3-} \frac{2}{\sqrt{3-x}} = \infty$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[-4\cdot\sqrt{3-x}\right]_0^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} -4\cdot\overset{\to 0}{\sqrt{\varepsilon}} \underbrace{-(-4)\sqrt{3}}_{4\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{3-x}}\,dx = 2\int (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 2\cdot\frac{(3-x)^{1/2}}{1/2}\cdot(-1) + c = -4\cdot\sqrt{3-x} + c$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ Leibniz-e? Absz. konv?

$\sum a_n$ $\sum |a_n|$

vannak negatív elemek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{-1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720 \cdot 7} \dots$$

$\left.\begin{array}{l} \text{– alternálás: } (-1)^n \text{ váltott előjel} \\ \qquad \frac{1}{(2n+1)!} > 0 \ \dots \end{array}\right\}$ ok

– $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\underbrace{(2n+1)!}_{\to\infty}} = 0$ ok

– $|a_n|$ mon. csökken

$$|a_n| \geq |a_{n+1}|$$

$$\frac{1}{(2n+1)!} \geq \frac{1}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1}{(2n+3)!}$$

$(2n+3)! \geq (2n+1)!$ ok ⇒ Leibniz, azaz konvergens.

$\sum |a_n|$ vajon konvergens-e?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \underset{n=1}{\frac{1}{3!}} + \underset{n=2}{\frac{1}{5!}} + \underset{n=3}{\frac{1}{7!}} + \dots \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

hányados krit.: $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n(2n+1)}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n\cdot(2n+1)}(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{(2n+2)(2n+3)}_{\infty\cdot\infty=\infty}} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}} < 1$$

$\to$ konv. $\sum |a_n|$

$\to$ $\sum a_n$ abszolút konv.

Sorok vizsgálata

- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to$ DIV. $\Sigma\, a_n$
- geom. sorok: $\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \dots$ $\begin{cases} \text{KONV. ha } |q|<1 \to \frac{a}{1-q} \\ \text{DIV. egyébként} \end{cases}$
- vannak negatív tagok a sorban
  - a, Leibniz: – alternál, – $\lim a_n = 0$, – $|a_n|$ mon. csökken $\Big\} \to$ KONV.
  - b, $\Sigma\, |a_n|$
- pozitív tagú sorok $a_n \geq 0$

  $\sum \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konv. } p>1 \\ \text{div. } p \leq 1 \end{cases}$

  – majoráns krit. van $\Sigma\, b_n$, hogy konv. és $b_n \geq a_n \geq 0 \to \Sigma\, a_n$ KONV.

  – minoráns van $\Sigma\, b_n$, hogy div. és $0 \leq b_n \leq a_n \to \Sigma\, a_n$ DIV.

  - hányados krit. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = H$
  - gyök krit. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = H$

  $\begin{cases} H<1 \to \text{KONV.} \\ H=1 \to \text{nem tudjuk} \\ H>1 \to \text{DIV.} \end{cases}$

Ha $\Sigma\, a_n$ konv. de $\Sigma\, |a_n|$ div. $\Rightarrow$ felt. konv.

Ha $\Sigma\, |a_n|$ konv. $\Rightarrow$ $\Sigma\, a_n$ konv.