

A2 vizsga (06.12.) 6. feladat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n + 3} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \dots$$

Leibniz-c? - alternálás: $(-1)^n$ váltakozó előjellel
 $\frac{1}{2^n + 3} > 0$ mindig

- monotonitás
 $n=1 \quad n=2 \quad n=0$

Kikötő $(n-3)^2$: $4 > 1 > 0 < 1 < 4 < \dots$

$$\frac{n^2 - 6n + 9}{n^4 + \dots}$$

$\Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$ kell ellenőrizni

Példa: $|a_n| = \frac{1}{2^n + 3}$

~~$|a_n| \geq |a_{n+1}|$~~

~~$\frac{1}{2^n + 3} \geq \frac{1}{2^{n+1} + 3}$~~

~~$2^n < 2^{n+1}$~~

~~$2^n + 3 < 2^{n+1} + 3$~~

Néha a nevező
 $\Rightarrow$ Ez igazolja a tagok monotonitását

Leibniz: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2^n + 3} \stackrel{?}{=} 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n + 3} = \frac{1}{\infty} = 0$
 Elegendes $\rightarrow \infty$

Ez a sor Leibniz $\Rightarrow$ tehát konvergens.

Abszolút konvergens-e?

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (első: min / maj. s. hányad / győz)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$

konvergens-e?

$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$

$\sum |a_n|$ konv és $\sum a_n$ is $\Rightarrow$ ABSZOLÚT konv.

$\sum |a_n|$ div. de $\sum a_n$ konv. $\Rightarrow$ FELTÉTELES konv.

$\sum |a_n|$ div. $\Leftarrow \sum a_n$ div.

Hányados: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1} + 3} \cdot \frac{2^n + 3}{2^n + 3} =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{2 \cdot 2^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{2^n}}{2 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1 + \frac{3}{\infty}}{2 + \frac{3}{\infty}} = \frac{1 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2} < 1$

$\rightarrow$ tehát $\sum |a_n|$ konv.

Gyöklimit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 3}} = ? = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{[I am] konv.}$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2 \cdot 2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n + 2^n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{2^n + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\downarrow$ ∞
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ∞ $\frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

✓ Mit Induktion? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$ -rel $q = \frac{1}{2} < 1$
 or konvergenz!

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 \dots$ Geom.-sr
 Da $|q| < 1 \Rightarrow \text{konv.}$

$\forall n\text{-re } \frac{1}{2^n + 3} \leq \frac{1}{2^n}$ $|q| \geq 1 \Rightarrow \text{div.}$

majorans krit. macht
 konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2+2} \quad ? \quad 0$$

$$\left(2, \frac{1}{n} \right)$$

$$? \sum |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{6} + \frac{4}{11} + \frac{5}{18} + \dots$$

$$\underbrace{\frac{3}{6}}_{= \frac{1}{2}}$$

Hányasok: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} \cdot \frac{n^2+2}{n+1} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n^2+2)}{(n^2+2n+3)(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n^2+2n+4}{n^3+3n^2+5n+3} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = 1 \leftarrow \text{nem működik} \dots$$

Gyűjts: $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ $\sqrt[n]{n^2} \rightarrow 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n^2+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n^2+2}} = \frac{1}{1} = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n+1}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2n}}_{\underbrace{= \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}_{1 \cdot 1 = 1}}$$

$$\underbrace{(\sqrt[n]{n})^2}_{\downarrow 1^2} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^2+2}}_{\substack{\downarrow \\ n \rightarrow \infty \\ 1}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^2+n^2}}_{\downarrow 1 \cdot 1^2} = \sqrt[n]{2 \cdot n^2} = \sqrt[n]{2} (\sqrt[n]{n})^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+2}$$

$$\frac{\sim n}{\sim n^2} = \frac{1}{n}$$

Fantas! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \rightarrow \alpha \leq 1$ div.
 $\searrow \alpha > 1$ kon.

Divergens pl $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\sum \frac{1}{n}$; $\sum \frac{1}{n^{2/3}} = \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

Konvergens $\sum \frac{1}{n^2}$; $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

Minorálo's minörölhet

$$|a_n| = \frac{n+1}{n^2+2} > \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

(n > 1)

$\Rightarrow$ also' becslo' (minorálo') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow \infty / 2 = \infty$
 divergens sor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$
 mert $\sum \frac{1}{n} = \infty$

$\Rightarrow \sum |a_n|$ divergens

$\sum (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2+2} \rightarrow$ Leibniz, mert -alternál $(-1)^n$ miatt

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

- monotonitás

$\frac{n+1}{n^2+2} \rightarrow$ növekszik

$\frac{n+1}{n^2+2} \rightarrow$ csökkenik

DE a numeró "Gyengesabb"

$$|a_n| \geq |a_{n+1}|$$

$$\frac{n+1}{n^2+2} \geq \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3}$$

$$(n+1)(n^2+n+3) \geq (n^2+2)(n+2)$$

$$\cancel{n^3} + 3n^2 + \cancel{3n} + 3 \geq \cancel{n^3} + 2n^2 + 3n + 4$$

$$n^2 + 3n \geq 1$$

$\Rightarrow$ van Leibniz korr.

$\sum |a_n|$ div.

A sor feltételezhetően konv.