

Feladatok

1.) Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx \quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás - 1.)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2 + x} dx$$

A tört résztörtekre bontásával:

(1 pont)

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$$

$$A + B = 0 \text{ és } A = 1, \text{ tehát } B = -1$$

(2 pont)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2 + x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx - \int_1^b \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right]_1^b$$

(1 pont)

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{b}{b+1} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln(1) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = 0 + \ln(2) = \ln(2).$$

(1 pont)

Az integrál konvergencia, határértéke $\ln(2)$.

2.) Számítsa ki az $A(3, 2, -2), B(4, 1, -3), C(1, -2, 1)$ csúcspontú háromszög területét! Írja fel a háromszög síkjának egyenletét! (8 pont)

Megoldás - 2.)

Legyen $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (-2, -4, 3)$. (1 pont)

Az ABC háromszög területe a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített paralelogramma területének a fele. Ami pontosan a $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-3 - 3, 3 - 2, -4 - 2) = (-7, -1, -6)$ vektor hossza. (2 pont)

Ez utóbbi vektor hossza $\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{86}$. (1 pont)

Így a háromszög területe $\frac{\sqrt{86}}{2}$. (1 pont)

A háromszög síkjában fekvő pont például $A(3, 2, -2)$, a sík normálvektora pedig $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-7, -1, -6)$, így a sík egyenlete:

$$-7(x - 3) - (y - 2) - 6(z + 2) = 0,$$

$$7x + y + 6z = 11. \quad (3 \text{ pont})$$

3.) Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait a "c" paraméter függvényében!

$$3x + 2y - z = c$$

$$x + 3y - 2z = 2$$

$$2x - y + z = 1$$

(8 pont)

Megoldás - 3.)

Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & c \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & c \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{s_2 - 3s_1 \\ s_3 - 2s_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & c-6 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_3} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 5 & c-6 \end{array} \right) \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & c-3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(3 pont)

- $c \neq 3$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2 < \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ nincs megoldás. (2 pont)
- $c = 3$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < 3$ végtelen sok megoldás van (egy szabad változó), ekkor a megoldáshalmaz:

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R}, -7y + 5z = -3, \text{ így } 7y = 5z + 3, \quad y = \frac{5}{7}z + \frac{3}{7}, \\ \text{továbbá } x + 3y - 2z = 2, \text{ ezért } x = -3y + 2z + 2 = -\frac{15}{7}z - \frac{9}{7} + 2z + 2 = -\frac{1}{7}z + \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

(3 pont)

4.) Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Diagonalizálja a mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(9 pont)

Megoldás - 4.)

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5).$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 5$. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_1 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x + 2y = 0 \\ 2x + 1y = 0 \end{array} \Rightarrow y = -2x, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 5$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{array} \Rightarrow x = 2y, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(3 pont)

Sajátvektorokból álló ortonormált bázis például: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$

$$\text{azaz } \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T, \quad (2 \text{ pont })$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

5.) Számítsa ki az $f(x, y) = \ln(x) \cdot y^2 + \frac{2x - y^3}{y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(1, 2)$ pontban, majd írja fel itt az érintősík egyenletét! Mennyi lesz a P pontban a $\mathbf{v} = (-1, 1)$ irányban vett iránymenti derivált? (7 pont)

Megoldás - 5.)

$$f(1, 2) = \ln(1) \cdot 2^2 + \frac{2 \cdot 1 - 2^3}{2} = 0 + \frac{-6}{2} = -3$$

$$f'_x(1, 2) = \frac{y^2}{x} + \frac{2}{y} \bigg|_{(1,2)} = \frac{4}{1} + \frac{2}{2} = 5, \quad f'_y(1, 2) = 2 \ln(x)y - \frac{2x}{y^2} - 2y \bigg|_{(1,2)} = 0 - \frac{2}{4} - 2 \cdot 2 = -\frac{9}{2},$$

(3 pont)

Így a P -beli érintősík egyenlete: $z = 5(x - 1) - \frac{9}{2}(y - 2) - 3$, azaz $5x - \frac{9}{2}y - z = -1$. (2 pont)
Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az egység hosszú irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_v(P) = \langle f(P), \mathbf{v}_0 \rangle = \left\langle \left(5, -\frac{9}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{9}{2\sqrt{2}} = -\frac{19}{2\sqrt{2}}.$$

(2 pont)

6.) Döntse el, hogy az alábbi sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergencia-e ez a sor? Válaszát indokolja!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+1}.$$

(8 pont)

Megoldás - 6.)

Itt mindhárom Leibniz-feltétel teljesül, mivel a $(-1)^n$ miatt alternálóak a tagok, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{n+1/n} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

és a sorozat monoton csökkenő mivel $|a_n| > |a_{n+1}|$:

$$\frac{n+2}{n^2+1} > \frac{n+3}{n^2+2n+2}$$

$$(n+2)(n^2+2n+2) > (n+3)(n^2+1)$$

$$n^3+4n^2+6n+4 > n^3+3n^2+n+3$$

$$n^2+5n+1 > 0.$$

(5 pont)

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergenciáját kell vizsgálni, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n+2}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n},$$

ami divergens, mert tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$. Így a sor a minoráns kritérium miatt nem abszolút konvergens. (3 pont)