

Feladatok

1.) Keressük meg a $z^3 + 3z^2 + 6z + 4 = 0$ polinom gyökeit a komplex számok körében, és írjuk fel gyöktényezős alakban. (6 pont)

Megoldás - 1.)

A polinom egész gyöke lehet a 4 valamelyik osztója.

$$(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 4 = -1 + 3 - 6 + 4 = 0, \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát $z = -1$ gyöke a polinomnak, így $(z + 1)$ kiemelhető:

$$\begin{array}{r} (z^3 + 3z^2 + 6z + 4) : (z + 1) = z^2 + 2z + 4 \\ \underline{z^3 + z^2} \\ 2z^2 + 6z + 4 \\ \underline{2z^2 + 2z} \\ 4z + 4 \\ \underline{4z + 4} \\ 0 \end{array} \quad (2 \text{ pont})$$

Tehát $z^3 + 3z^2 + 6z + 4 = (z + 1)(z^2 + 2z + 4)$.

A másodfokú tag gyökei a megoldóképlet alapján:

$$z_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm i\sqrt{3}. \quad (2 \text{ pont})$$

Így a polinom gyöktényezős alakja:

$$z^3 + 3z^2 + 6z + 4 = (z + 1)(z + 1 - i\sqrt{3})(z + 1 + i\sqrt{3}). \quad (1 \text{ pont})$$

2.) Írja fel a $\mathbf{v}_1 = (1, -2, -1)$ és $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 3)$ vektorokkal párhuzamos, a $P(2, 2, 4)$ ponton átmenő sík egyenletét. Milyen távol van ettől a síktól a $Q(0, 3, 1)$ pont? (6 pont)

Megoldás - 2.)

Mivel a vektoriális szorzat a két tényezőre merőleges vektor, így ezen sík egy normálvektora

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-7, -6, 5)$$

Így a sík egyenlete: $-7x - 6y + 4z = (-7) \cdot 2 + (-6) \cdot 2 + 4 \cdot 4,$

$$-7x - 6y + 5z = -6, \quad (3 \text{ pont})$$

A $Q(0, 3, 1)$ pontnak ettől a síktól való távolságát a Hesse-féle normálalakból számolhatjuk:

$$\left| \frac{-7x_Q - 6y_Q + 5z_Q + 6}{\sqrt{(-7)^2 + (-6)^2 + 5^2}} \right| = \left| \frac{-7 \cdot 0 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 6}{\sqrt{110}} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{110}} \right| = \frac{7}{\sqrt{110}}. \quad (3 \text{ pont})$$

3.) Határozza meg az összes olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyre teljesül, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + 2\mathbf{x}, \quad \text{ha} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (7 \text{ pont})$$

Megoldás - 3.)

Az egyenletet átrendezve: $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ pont})$$

Kiszámítjuk az inverzet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+1-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ pont})$$

Ezért az ismeretlen vektor értéke:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pont})$$

4.) Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad (9 \text{ pont})$$

Megoldás - 4.)

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 2(-3+2(1-\lambda)) + (-2-\lambda)((1-\lambda)^2-2) =$$

$$-2-4\lambda+(-2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-1) = \lambda-\lambda^3 = \lambda(1-\lambda^2) = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 1$. (3 pont)

A sajátvektorok $\lambda_1 = 0$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rrcr} x & +2y & +2z & = 0 \\ x & +y & & = 0 \\ -2x & -3y & -2z & = 0 \end{array}.$$

A középső egyenletből $y = -x$, ezért az első egyenlet $x - 2x + 2z = 0$, tehát $x = 2z$. Ekkor az utolsó egyenlet mindig teljesül, mert $-2x + 3x - x = 0$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = (2z, -2z, z)$, $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_2 = -1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rrcr} 2x & +2y & +2z & = 0 \\ x & +2y & & = 0 \\ -2x & -3y & -z & = 0 \end{array}.$$

A középső egyenletből $x = -2y$, ezért az első egyenlet $-4y + 2y + 2z = 0$, tehát $y = z$. Ekkor az utolsó egyenlet mindig teljesül, mert $4y - 3y - y = 0$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = (-2y, y, y)$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_3 = 1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rrc} 2y & +2z & = 0 \\ x & & = 0 \\ -2x & -3y & -3z = 0 \end{array}.$$

Az első és második egyenletből $z = -y$ és $x = 0$. Ekkor az utolsó egyenlet mindig teljesül, mert $0 + 3z - 3z = 0$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = (0, -z, z), \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2 pont)

5.) Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + 2xy + xy^2 - 3x$ függvény lokális szélsőértékeit. (9 pont)

Megoldás - 5.)

A függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + 2y + y^2 - 3 = 0 \\ f'_y(x, y) &= 2x + 2xy = 0 \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

Az második egyenlet $2x(1 + y) = 0$, azaz $x = 0$ vagy $y = -1$. Ha $x = 0$, akkor az első egyenlet $y^2 + 2y - 3 = (y + 3)(y - 1) = 0$, azaz $y = -3$ vagy $y = 1$. Ha $y = -1$, akkor az első egyenletből $2x - 2 + 1 - 3 = 2x - 4 = 0$, tehát $x = 2$. Így a stacionárius pontok: a $P_1(0, -3), P_2(0, 1), P_3(2, -1)$. (3 pont)

A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 2 + 2y, \quad f''_{yy}(x, y) = 2x$$

Ebből a Hesse-féle determináns: $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 4x - (2 + 2y)^2$, (2 pont)
ez a P_1 és P_2 pontokban $0 - (2 - 6)^2 = -16$ illetve $0 - (2 + 2)^2 = -16$ negatív, ott nincs szélsőérték (nyeregponatok). A $P_3(2, -1)$ pontban a determináns értéke $8 - (2 - 2)^2 = 8 > 0$ valóban lokális szélsőérték, és mivel $f''_{xx}(x, y) = 2$ pozitív, így ez lokális minimum hely. A lokális minimum értéke: $f(2, -1) = 4 - 4 + 2 - 6 = -4$. (3 pont)

6.) Döntse el, hogy az alábbi sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergencia-e ez a sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)!} \quad (8 \text{ pont})$$

Megoldás - 6.)

Itt mindhárom Leibniz-feltétel teljesül, mivel a $(-1)^n$ miatt alternálóak a tagok, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n+1)!} = \frac{2}{\infty} = 0,$$

és a sorozat monoton csökkenő mivel $|a_n| > |a_{n+1}|$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(n+1)!} &> \frac{2}{(n+2)!} \\ 2(n+2)! &> 2(n+1)! \\ n+2 &> 1. \end{aligned}$$

(5 pont)

Mivel a sor Leibniz típusú, ezért konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}$ sor konvergenciáját kell vizsgálni, hányados kritériummal számolva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{(n+2)!}}{\frac{2}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

ezért az abszolút sor is konvergens lesz. Így az eredeti sor abszolút konvergens is. (3 pont)