

Feladatok

1.) Legyen $z = 2 + 2i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a hatodik hatványát és a harmadik gyökeit. (7 pont)

Megoldás - 1.)

A $z = 2 + 2i$ komplex szám abszolútértéke: $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ és argumentuma:

$$\sin(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 45^\circ, 135^\circ; \quad \cos(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 45^\circ, 315^\circ;$$

Így a trigonometrikus alak: $z = \sqrt{8}(\cos(45^\circ) + i \sin(45^\circ))$. (2 pont)

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned} z^6 &= (8)^3 (\cos(6 \cdot 45^\circ) + i \sin(6 \cdot 45^\circ)) = 2^9 (\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ)) = \\ &= 512 (\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ)) = -512i. \end{aligned} \quad (2 \text{ pont})$$

A z komplex számnak három köbgyöke van:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{8} \left(\cos\left(\frac{45^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{45^\circ}{3}\right) \right) = \sqrt{2} (\cos(15^\circ) + i \sin(15^\circ)), \\ z_2 &= \sqrt[6]{8} \left(\cos\left(\frac{45^\circ + 360^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{45^\circ + 360^\circ}{3}\right) \right) = \sqrt{2} (\cos(135^\circ) + i \sin(135^\circ)) = -1 + i, \\ z_3 &= \sqrt[6]{8} \left(\cos\left(\frac{45^\circ + 720^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{45^\circ + 720^\circ}{3}\right) \right) = \sqrt{2} (\cos(255^\circ) + i \sin(255^\circ)). \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

2.) Határozza meg az $\mathbf{a} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 4)$ és $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$ vektorok vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát. (5 pont)

Megoldás - 2.)

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(2 - 8) - (-1)(2 - 12) + 3(4 - 6) = -6 - 10 - 6 = -22. \quad (3 \text{ pont})$$

A vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata ennek abszolút értéke, azaz 22. (2 pont)

3.) Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait!

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z + u &= 0 \\ x - 4y + 2z - 2u &= -2 \\ x - y - z + u &= 1 \end{aligned} \quad (8 \text{ pont})$$

Megoldás - 3.)

Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\begin{matrix} s_2 - s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{matrix} \\ &\xrightarrow{s_2 - s_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) &\xrightarrow{s_2 + s_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -5 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

Itt $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3 = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < \text{változók száma} = 4$ azaz végtelen sok megoldás van ($4-3 = \text{egy}$ szabad változóval), ekkor a megoldáshalmaz: (2 pont)

$$u \in \mathbb{R}, 3z - 4u = -5, \text{ így } z = \frac{4}{3}u - \frac{5}{3},$$

$$\text{ekkor } -3y + 3z - 3u = -3, \text{ ezért } y = z - u + 1 = \frac{4}{3}u - \frac{5}{3} - u + 1 = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3},$$

$$\text{és } x - y - z + u = 1, \text{ ezért } x = y + z - u + 1 = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}u - \frac{5}{3} - u + 1 = \frac{2}{3}u - \frac{4}{3}. \quad (3 \text{ pont})$$

4.) Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Diagonalizálja a mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9 \text{ pont})$$

Megoldás - 4.)

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_1 = 1$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{matrix} \Rightarrow y = x, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 3$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = -y, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3 \text{ pont})$$

Sajátvektorokból álló orthonormált bázis például: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$

azaz $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Itt (az orthonormált bázis miatt) $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T$, (2 pont)

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pont})$$

5.) Egy 2m^3 térfogatú téglatest alakú medence alját egy rétegben, a többi oldalát két rétegben befestjük. Milyen hosszúak legyenek a téglatest oldalélei, hogy a lehető legkevesebb festéket használjuk fel? (8 pont)

Megoldás - 5.)

Legyenek a téglatest oldalhosszai a, b, c (méterben mérve). Ekkor a térfogat $abc = 2$, amiből $c = \frac{2}{ab}$. Ha a és b a medence szélessége és hosszúsága (c a mélysége), feltesszük hogy $a, b, c > 0$. Ekkor a festéskor ab négyzetméter festéket használunk a medence aljához, és $2(2ac + 2bc)\text{m}^2$ festék kell az oldalfalak kétszeri, így

$$f(a, b, c) = ab + 4ac + 4bc, \quad \text{azaz} \quad f(a, b) = ab + \frac{8}{b} + \frac{8}{a} \quad \text{függvényt kell minimalizálni.}$$

(2 pont)

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = b - \frac{8}{a^2}, \quad f'_b(a, b) = a - \frac{8}{b^2}.$$

A stacionárius pontok kiszámításához az egyenletek:

$$ba^2 - 8 = 0 \quad \text{és} \quad ab^2 - 8 = 0.$$

Ezekből $ba^2 = ab^2$ azaz $a = b$. Ekkor $b^3 = 8$, amiből $b = a = \sqrt[3]{8} = 2$. Ekkor $c = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$. (3 pont)

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$f''_{aa}(a, b) = \frac{16}{a^3}, \quad f''_{ab}(a, b) = 1, \quad f''_{bb}(a, b) = \frac{16}{b^3},$$

így a Hesse-determináns:

$$\det(\mathbf{Hesse} f(2, 2)) = \begin{vmatrix} \frac{16}{8} & 1 \\ 1 & \frac{16}{8} \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

ami pozitív, s mivel $f''_{aa}(2, 2) = 2$ is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen oldal-hosszak esetén: $a = b = 2$ m és $c = \frac{1}{2}$ m használjuk fel a legkevesebb festéket.

(3 pont)

6.) Döntse el, hogy az alábbi sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergencia-e ez a sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n + 3} \quad (8 \text{ pont})$$

Megoldás - 6.)

Itt mindhárom Leibniz-feltétel teljesül, mivel a $(-1)^n$ miatt alternálóak a tagok, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n + 3} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

és a sorozat monoton csökkenő mivel $|a_n| > |a_{n+1}|$:

$$\frac{1}{2^n + 3} > \frac{1}{2^{n+1} + 3}$$

$$2^{n+1} + 3 > 2^n + 3$$

$$2^{n+1} > 2^n$$

$$2 > 1.$$

(5 pont)

Mivel a sor Leibniz típusú, ezért konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$ sor konvergenciáját kell vizsgálni. A majoráns kritérium alapján

$$\frac{1}{2^n + 3} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

ezen tagok konvergens sort alkotnak, mert tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ geometriai sor konvergens, ha $|q| < 1$. Így a sor a majoráns kritérium miatt abszolút konvergens is. (3 pont)