

Feladatok

1.) Keresse meg a $z^3 + 3z^2 + 3z + 2$ polinom gyökeit a komplex számok körében, és írja fel gyöktényezős szorzatalakban! (6 pont)

Megoldás - 1.)

A polinom egész gyöke lehet a 2 valamelyik osztója.

$$(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 12 - 6 + 2 = 0, \quad (1 \text{ pont})$$

Tehát $z = -2$ gyöke a polinomnak, így $(z + 2)$ kiemelhető:

$$\begin{array}{r} (z^3 + 3z^2 + 3z + 2) : (z + 2) = z^2 + z + 1 \\ \underline{z^3 + 2z^2} \\ z^2 + 3z + 2 \\ \underline{z^2 + 2z} \\ z + 2 \\ \underline{z + 2} \\ 0 \end{array} \quad (2 \text{ pont})$$

Tehát $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = (z + 2)(z^2 + z + 1)$.

A másodfokú tag gyökei a megoldóképlet alapján:

$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (2 \text{ pont})$$

Így a polinom gyöktényezős alakja:

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = (z + 2) \left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right). \quad (1 \text{ pont})$$

2.) Bontsa fel a $\mathbf{v} = (3, 4, -1)$ vektort az $\mathbf{a} = (2, 1, -2)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére. Számítsa ki a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok ebben a sorrendben vett vektoriális szorzatát is! (7 pont)

Megoldás - 2.)

A párhuzamos komponens:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} = \frac{6 + 4 + 2}{4 + 1 + 4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{12}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ pont})$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 8/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pont})$$

A vektorok vektoriális szorzata:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-7, 4, -5). \quad (2 \text{ pont})$$

3.) Határozza meg az összes olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyre teljesül, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{x}, \text{ ha } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ és } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (7 \text{ pont})$$

Megoldás - 3.)

Az egyenletet átrendezve: $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ pont})$$

Kiszámítjuk az inverzet:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-7+6} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -7 & 6 & 8 \end{pmatrix}^T = (-1) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -4 & -1 & 6 \\ -5 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ pont})$$

Ezért az ismeretlen vektor értéke:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pont})$$

4.) Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait a "c" paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} 3x - 4y + cz &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ x - y - 3z &= 0 \end{aligned} \quad (8 \text{ pont})$$

Megoldás - 4.)

Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & -4 & c & | & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & | & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -4 & c & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 3s_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & c+9 & | & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{s_2 - 2s_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & c+9 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3 - s_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 7 & | & 0 \\ 0 & 0 & c+2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad (3 \text{ pont}) \end{aligned}$$

- ha $c \neq -2$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 = \text{változók száma}$, azaz egy darab egyértelmű megoldás van. Mivel az egyenletrendszer homogén, ezért ez az $x = y = z = 0$ triviális megoldás lesz. (2 pont)
- $c = -2$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < 3$ végtelen sok megoldás van (egy változó szabadon választható), ekkor a megoldáshalmaz:

$$z \in \mathbb{R}, -y + 7z = 0, \text{ így } y = 7z$$

$$\text{továbbá } x - y - 3z = 0, \text{ ezért } x = y + 3z = 7z + 3z = 10z. \quad (3 \text{ pont})$$

5.) Számítsa ki az $f(x, y) = 3y^2 + \ln(x - y)$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(2, 1)$ pontban, és írja fel itt az érintősík egyenletét, majd állapítsa meg itt az $\alpha = 135^\circ$ irányszögben vett iránymenti derivált értékét! (9 pont)

Megoldás - 5.)

$$f(2, 1) = 3 \cdot 1^2 + \ln(2 - 1) = 3 + 0 = 3,$$

$$f'_x(2, 1) = 0 + \frac{1}{x - y} \cdot 1 \Big|_{(2, 1)} = \frac{1}{2 - 1} = 1,$$

$$f'_y(2, 1) = 6y + \frac{1}{x - y} \cdot (-1) \Big|_{(2, 1)} = 6 \cdot 1 + \frac{-1}{2 - 1} = 5.$$

(3 pont)

Így a P -beli érintősík egyenlete: $z = 1(x - 2) + 5(y - 1) + 3$, azaz $x + 5y - z = 4$. (2 pont)

Az egységnyi irányvektor a 135° irányban: $\mathbf{v}_0 = (\cos(135^\circ), \sin(135^\circ)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. (2 pont)

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az egység hosszú irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_v(P) = \langle \mathbf{grad} f(P), \mathbf{v}_0 \rangle = \left\langle (1, 5), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \quad (2 \text{ pont})$$

6.) Döntse el, hogy az alábbi sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergencia-e ez a sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}. \quad (8 \text{ pont})$$

Megoldás - 6.)

Itt mindhárom Leibniz-feltétel teljesül, mivel a $(-1)^n$ miatt alternálóak a tagok, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

és a sorozat monoton csökkenő mivel $|a_n| > |a_{n+1}|$:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3 + 1}}$$

$$\sqrt{(n+1)^3 + 1} > \sqrt{n^3 + 1}$$

$$(n+1)^3 > n^3.$$

(5 pont)

Mivel a sor Leibniz típusú, ezért konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$ sor konvergenciáját kell vizsgálni.

A majoráns kritérium alapján

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ sor konvergens, mert n kitevője $3/2 > 1$. Így az abszolút sor is konvergens lesz, ezért az eredeti sor abszolút konvergens is. (3 pont)