GTK NG&PSz A2 vizsga - 2025.06.25. MEGOLDÁSOK

Feladatok

1.) Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+2\,x)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (5 \text{ pont})$$

Megoldás - 1.)

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+2x)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{(1+2x)^2} = \qquad (1 \text{ pont})$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^b \frac{1}{(1+2x)^2}\cdot 2\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{1+2x}\Big]_1^b = \qquad (2 \text{ pont})$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{3}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{6}-\frac{1}{2+4b} = \frac{1}{6}. \qquad (2 \text{ pont})$$

Az integrál konvergens, határértéke $\frac{1}{6}$.

2.) Írja fel a $P(1,4,3)$ ponton átmenő $\mathbf{v_1}=(2,-1,2)$ és $\mathbf{v_2}=(1,0,3)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletét, és számítsa ki a $Q(1,1,-1)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát. (6 pont)

Megoldás - 2.)

Mivel a vektoriális szorzat a két tényezőre merőleges vektor, így ezen sík egy normálvektora

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3,-4,1)$$

Így a sík egyenlete:

$$-3(x-1)-4(y-4)+(z-3)=0,$$

$$3x+4y-z=16, \qquad (3 \text{ pont})$$

A $Q(1,1,-1)$ pontnak ettől a síktól való távolságát a Hesse-féle normálalakból számolhatjuk:

$$\left|\frac{3x_Q+4y_Q-z_Q-16}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{3\cdot 1+4\cdot 1-1\cdot(-1)-16}{\sqrt{26}}\right| = \left|\frac{-8}{\sqrt{26}}\right| = \frac{8}{\sqrt{26}}.$$

(3 pont)

3.) Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait!

$$\begin{aligned} 4x+4y-z-u&=0 \\ x+3y-2z&=1 \\ 2x-2y+z+u&=2 \\ x-5y+3z+u&=1 \end{aligned}$$

(8 pont)

Megoldás - 3.)

Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{s_1\leftrightarrow s_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} s_2-4s_1 \\ \sim \\ s_3-2s_1 \\ s_4-s_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & -8 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{s_4-s_2}{\overset{s_3-s_2}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{s_4-s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3 pont)

Itt $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3 = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) <$változók száma $= 4$ azaz végtelen sok megoldás van $(4-3=$egy szabad változóval), ekkor a megoldáshalmaz: (2 pont)

$u \in \mathbb{R}$, $-2z + 2u = 4$, így $z = u - 2$,

továbbá $-8y + 7z - u = -4$, ezért $8y = 7z - u + 4 = 7u - 14 - u + 4 = 6u - 10$,

tehát $y = \frac{3}{4}u - \frac{5}{4}$,

és $x + 3y - 2z = 1$, ezért $x = -3y + 2z + 1 = -\frac{9}{4}u + \frac{15}{4} + 2u - 4 + 1 = -\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}$.

(3 pont)

4.) Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(9 pont)

Megoldás - 4.)

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\Big((2-\lambda)(-2-\lambda)+4\Big) - \Big((-2-\lambda)+4\Big) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2) + \lambda - 2 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2,$$

melynek gyökei (a 2 osztói közül) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 1$ is. (3 pont)

A sajátvektorok $\lambda_1 = 2$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} & y & -2z & = 0 \\ x & & -2z & = 0 \\ & 2y & -4z & = 0 \end{array}.$$

Az első két egyenletből $y = 2z$ és $x = 2z$ adódik. Ekkor az utolsó egyenlet mindig teljesül, mert $2(2z) - 4z = 0$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = \big(2z, \ \ 2z, \ \ z\big), \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_2 = -1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 3x & +y & -2z & = 0 \\ x & +3y & -2z & = 0 \\ & 2y & -z & = 0 \end{array}.$$

Az utolsó egyenletből $z = 2y$, ezért az első egyenlet $3x + y - 2(2y) = 3x - 3y = 0$, tehát $x = y$. Ekkor a középső egyenlet mindig teljesül, mert $y + 3y - 2(2y) = 0$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = \big(y, \ \ y, \ \ 2y\big), \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_3 = 1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & = 0 \\ x & +y & -2z & = 0 \\ & 2y & -3z & = 0 \end{array}.$$

Az utolsó egyenletből $y = \frac{3}{2}z$. Ekkor az első és második egyenletek $x + \frac{3}{2}z - 2z = x - \frac{1}{2}z = 0$, azaz $x = \frac{1}{2}z$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = \left(\frac{1}{2}z,\ \ \frac{3}{2}z,\ \ z\right),\quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2 pont)

5.) Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4y$ függvény lokális szélsőértékeit. (9 pont)

Megoldás - 5.)

A függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x + 2y = 0 \\ f'_y(x, y) &= 2x + 6y - 4 = 0 \end{aligned}$$

(1 pont)

Az első egyenlet $2x + 2y = 0$ miatt $x = -y$. Ekkor a második egyenlet $2x + 6y - 4 = -2y + 6y - 4 = 4y - 4 = 0$, amiből $y = 1$. Így az egyetlen stacionárius pont a $P(-1, 1)$.

(3 pont)

A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \quad f''_{xy}(x, y) = 2, \quad f''_{yy}(x, y) = 6.$$

Ebből a Hesse-féle determináns: $\det(\mathbf{Hesse}f(-1, 1)) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8,$ (2 pont)

A determináns értéke $8 > 0$, így a $P(-1, 1)$ lokális szélsőérték hely, és mivel $f''_{xx}(x, y) = 2$ pozitív, így ez lokális minimum hely. A lokális minimum értéke: $f(-1, 1) = (-1)^2 + 2(-1)1 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2.$ (3 pont)

6.) Döntse el, hogy az alábbi sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergens-e ez a sor? Válaszát indokolja!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2 + n}.$$

(8 pont)

Megoldás - 6.)

Itt mindhárom Leibniz-feltétel teljesül, mivel a $(-1)^n$ miatt alternálóak a tagok, a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{n^2 + n} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

és a sorozat monoton csökkenő mivel $|a_n| > |a_{n+1}|$:

$$\frac{2}{n^2 + n} > \frac{2}{(n + 1)^2 + (n + 1)}$$

$$2(n^2 + 2n + 1 + n + 1) > 2(n^2 + n)$$

$$n^2 + 3n + 2 > n^2 + n$$

$$2n + 2 > 0.$$

(5 pont)

Mivel a sor Leibniz típusú, ezért konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + n}$ sor konvergenciáját kell vizsgálni, ekkor

$$\frac{2}{n^2 + n} < \frac{2}{n^2},$$

ami korvergens sort alkotó felső becslés, mert tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$. Így a sor a majoráns kritérium miatt abszolút konvergens. (3 pont)