GTK NG&PSz A2 vizsga - MINTA MEGOLDÁSOK

Feladatok

1.) Számolja ki a $z = 2 - 2i$ komplex szám harmadik gyökeit és hatodik hatványát! (8 pont)

Megoldás - 1.)

A $z = 2 - 2i$ komplex szám abszolútértéke: $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ és argumentuma:

$$\sin(\varphi) = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \to 225°, 315°; \quad \cos(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to 45°, 315°;$$

Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{8}\,(\cos(315°) + i\sin(315°)).$$

Ennek segítségével, a z komplex szám köbgyökei

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\left(\frac{315°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{315°}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\,(\cos(105°) + i\sin(105°)),\\
z_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\left(\frac{315°}{3} + 120°\right) + i\sin\left(\frac{315°}{3} + 120°\right)\right) = \sqrt{2}\,(\cos(225°) + i\sin(225°)),\\
z_3 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\left(\frac{315°}{3} + 240°\right) + i\sin\left(\frac{315°}{3} + 240°\right)\right) = \sqrt{2}\,(\cos(345°) + i\sin(345°)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^6 &= \left(\sqrt{8}\right)^6 (\cos(6\cdot 315°) + i\sin(6\cdot 315°)) = 8^3\,(\cos(90°) + i\sin(90°)) =\\
&= 8^3\,(0 + i(1)) = 512\,i.
\end{aligned}$$

2.) Bontsa fel a $\mathbf{v} = (-2, 2, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 0, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére. (5 pont)

Megoldás - 2.)

A párhuzamos komponens az előadáson tanult formulával:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\mathbf{a} = \frac{-11}{10}(3, 0, -1) = (-3.3, 0, 1.1).$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = (-2, 2, 5) - (-3.3, 0, 1.1) = (1.3, 2, 3.9).$$

3.) Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait Gauss-elimináció segítségével!

$$\begin{aligned}
4x + y - 3z &= 0\\
x - y + z &= 0\\
2x + 3y - 5z &= 0
\end{aligned}$$

(7 pont)

Megoldás - 3.)

Az egyenletrendszer mátrixát sortranszformációkkal alakítjuk:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_1 \leftrightarrow \mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0\\ 4 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3 - 2\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2 - 4\mathbf{s}_1}{\sim}}$$

$$\begin{array}{c} \scriptstyle s_2-4s_1 \\ \sim \\ \scriptstyle s_3-2s_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \scriptstyle s_3-s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az együttható mátrix és a kibővített mátrix rangja 2 (az egyenletrendszer homogén), tehát az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ha $z \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $y = \frac{7}{5}z = 1,4\,z$ a második sorból kifejezve, még $x = y - z = 0,4z$ az első sorból kifejezve.

4.) Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Invertálható-e a mátrix? Válaszát indokolja!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(9 pont)

Megoldás - 4.)

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)\left((-2-\lambda)(-\lambda) - 4\right) - 2(-2\lambda + 8) - 4(4 - (8 + 4\lambda)) =$$
$$= (-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 4) + 4\lambda - 16 - 16 + 32 + 16\lambda = (-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 24),$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$ és $\lambda_3 = 4$.
Egy λ sajátértékhez a sajátvektort az $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E_n} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a $\lambda_1 = 0$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $2y = 4z$ továbbá $4x = 2y$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$

$\lambda_2 = -6$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \scriptstyle s_2 \leftrightarrow s_1 \\ \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \scriptstyle s_2-3s_1 \\ \sim \\ \scriptstyle s_2+2s_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

Tehát $10y + 10z = 0$, $y = -z$ továbbá $2x - 4z + 2z = 0$, tehát $x = z$. Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \neq 0.$

$\lambda_3 = 4$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $y = 2x + 2z$ továbbá $3y = x + z$, azaz $y = 0$ és $x = -z$.

Így a sajátvektorok halmaza: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \neq 0.$

A mátrix determinánsa 0, így nem invertálható.

5.) Számítsa ki az $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{x+2y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(0,1)$ pontban, majd állapítsa meg itt a $\mathbf{v} = (1,-2)$ irányban vett iránymenti deriváltat is! (8 pont)

Megoldás - 5.)

Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = -\frac{\sqrt{y}}{(x+2y)^2} \cdot 1$$
$$f'_y(x,y) = -\frac{\sqrt{y}}{(x+2y)^2} \cdot 2 + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{x+2y}$$

Ezek értéke a $P(0,1)$ pontban:

$$f'_x(0,1) = -\frac{1}{4}, \qquad \text{és } f'_y(0,1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathbf{grad} f(P) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. A $\mathbf{v}$ vektor iránya:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{(1,-2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{v}}(P) = \langle \mathbf{grad} f(P), \mathbf{v}^* \rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = -\frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{2}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

6.) Állapítsa meg az alábbi hatványsor konvergenciatartományát.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

(8 pont)

Megoldás - 6.)

$a_n = \dfrac{1}{n^2 2^n}$ és $x_0 = 1$. A konvergenciasugárhoz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-1| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(\sqrt[n]{n})^2} |x-1| = \frac{1}{2} \cdot |x-1| < 1.$$

Így a hatványsor a $(-1,3)$ intervallumban biztosan konvergens. A két határpont:

$x = 3$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3-1)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, ami konvergens.

$x = -1$ esetén a hatványsor $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1-1)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, aminek abszolút sora konvergens, tehát abszolút konvergens.

Tehát a konvergenciatartomány a $[-1,3]$ intervallum.