

**Feladatok**

1.) Számolja ki a  $z = 2 - 2i$  komplex szám harmadik gyökeit és hatodik hatványát! (7 pont)

**Megoldás - 1.)**

A  $z = 2 - 2i$  komplex szám abszolútértéke:  $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  és argumentuma:

$$\sin(\varphi) = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 225^\circ, 315^\circ; \quad \cos(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 45^\circ, 315^\circ;$$

Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{8}(\cos(315^\circ) + i \sin(315^\circ)).$$

Ennek segítségével, a  $z$  komplex szám köbgyökei

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left( \cos\left(\frac{315^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{315^\circ}{3}\right) \right) = \sqrt{2}(\cos(105^\circ) + i \sin(105^\circ)),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left( \cos\left(\frac{315^\circ}{3} + 120^\circ\right) + i \sin\left(\frac{315^\circ}{3} + 120^\circ\right) \right) = \sqrt{2}(\cos(225^\circ) + i \sin(225^\circ)),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left( \cos\left(\frac{315^\circ}{3} + 240^\circ\right) + i \sin\left(\frac{315^\circ}{3} + 240^\circ\right) \right) = \sqrt{2}(\cos(345^\circ) + i \sin(345^\circ)).$$

$$\begin{aligned} z^6 &= (\sqrt{8})^6 (\cos(6 \cdot 315^\circ) + i \sin(6 \cdot 315^\circ)) = 8^3 (\cos(90^\circ) + i \sin(90^\circ)) = \\ &= 8^3 (0 + i(1)) = 512i. \end{aligned}$$

2.) Bontsa fel a  $\mathbf{v} = (-2, 2, 5)$  vektort az  $\mathbf{a} = (3, 0, -1)$  vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére. (6 pont)

**Megoldás - 2.)**

A párhuzamos komponens az előadáson tanult formulával:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} = \frac{-11}{10} (3, 0, -1) = (-3.3, 0, 1.1).$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (-2, 2, 5) - (-3.3, 0, 1.1) = (1.3, 2, 3.9).$$

3.) Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait Gauss-elimináció segítségével!

$$4x + y - 3z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$2x + 3y - 5z = 0$$

(7 pont)

**Megoldás - 3.)**

Az egyenletrendszer mátrixát sortranszformációkkal alakítjuk:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} s_2 - 4s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{s}_2 - 4\mathbf{s}_1 \\ \sim \\ \mathbf{s}_3 - 2\mathbf{s}_1 \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_2 \\ \sim \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Az együttható mátrix és a kibővített mátrix rangja 2 (az egyenletrendszer homogén), tehát az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ha  $z \in \mathbb{R}$  tetszőleges, akkor  $y = \frac{7}{5}z = 1,4z$  a második sorból kifejezve, még  $x = y - z = 0,4z$  az első sorból kifejezve.

4.) Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Invertálható-e a mátrix? Válaszát indokolja!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (9 \text{ pont})$$

**Megoldás - 4.)**

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)((-2-\lambda)(-\lambda)-4) - 2(-2\lambda+8) - 4(4-(8+4\lambda)) =$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-4) + 4\lambda - 16 - 16 + 32 + 16\lambda = (-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-24),$$

melynek a gyökei  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -6$  és  $\lambda_3 = 4$ .

Egy  $\lambda$  sajátértékhez a sajátvektort az  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n = \mathbf{0}$  homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a  $\lambda_1 = 0$  esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát  $2y = 4z$  továbbá  $4x = 2y$ . Így a sajátvektorok halmaza:  $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$

$\lambda_2 = -6$  esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 & | & 0 \\ 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ -4 & 2 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{s}_2 \leftrightarrow \mathbf{s}_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 6 & 2 & -4 & | & 0 \\ -4 & 2 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{s}_2 - 3\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 + 2\mathbf{s}_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & -10 & -10 & | & 0 \\ 0 & 10 & 10 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát  $10y + 10z = 0$ ,  $y = -z$  továbbá  $2x - 4z + 2z = 0$ , tehát  $x = z$ . Így a sajátvektorok halmaza:  $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \neq 0.$

$\lambda_3 = 4$  esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát  $y = 2x + 2z$  továbbá  $3y = x + z$ , azaz  $y = 0$  és  $x = -z$ .

Így a sajátvektorok halmaza:  $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \neq 0.$

A mátrix determinánsa 0, így nem invertálható.

5.) Számítsa ki az  $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{x+2y}$  kétváltozós függvény gradiensét a  $P(0, 1)$  pontban, majd írja fel a pontban az érintősíkot. Állapítsa meg itt a  $\mathbf{v} = (1, -2)$  irányban vett iránymenti deriváltat is! (9 pont)

**Megoldás - 5.)**

Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x, y) = -\frac{\sqrt{y}}{(x+2y)^2} \cdot 1, \quad f'_y(x, y) = -\frac{\sqrt{y}}{(x+2y)^2} \cdot 2 + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{x+2y}.$$

Ezek értéke a  $P(0, 1)$  pontban:

$$f'_x(0, 1) = -\frac{1}{4}, \quad \text{és} \quad f'_y(0, 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Így a függvény gradiense a  $P$ -ben:  $\mathbf{grad} f(P) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ .

A függvényérték a pontban  $f(0, 1) = \frac{1}{0+2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ , így az érintősíkok:

$$z = -\frac{1}{4}(x-0) - \frac{1}{4}(y-1) + \frac{1}{2},$$

$$x + y + 4z = 3.$$

A  $\mathbf{v}$  vektorral egyirányú egységnyi vektor:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1, -2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{(1, -2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az egység hosszú irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_v(P) = \langle \mathbf{grad} f(P), \mathbf{v}^* \rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = -\frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{2}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

6.) Állapítsa meg, hogy az alábbi sor feltételesen konvergens, abszolút konvergens vagy divergens!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

(7 pont)

**Megoldás - 6.)**

A sor Leibniz-sor, mert alternál, és  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$ , és  $|a_n|$  szigorúan monoton csökken, mert

$$\frac{1}{n^2 \cdot 2^n} > \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 2^{(n+1)}},$$

$$(n+1)^2 \cdot 2^{(n+1)} > n^2 \cdot 2^n,$$

$$2(n+1)^2 > n^2.$$

Továbbá a sor tagjainak abszolút értékeiből alkotott sor a hányadoskritérium alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n^2 \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 4n + 2} = \frac{1}{2} < 1$$

konvergens, mert a határérték  $< 1$ . Ezért az abszolút értékben vett tagok sora is konvergens, tehát a sor abszolút konvergens.