A2 MINTA(A) 1. zárthelyi – Megoldások

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2-x)^3}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(2-x)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_3^{c} (2-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{(2-x)^{-2}}{(-2)(-1)}\right]_3^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left[\frac{1}{2(2-x)^2}\right]_3^c = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2(2-c)^2} - \frac{1}{2(-1)^2} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Számolja ki az $2-2i$ komplex szám harmadik gyökeit! (5 pont)

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja

$r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$\cos(\arg(z)) = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ ill. $\sin(\arg(z)) = -2/(2\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$, alapján $\arg(z) = 315°$,

$$z = \sqrt{8}\left(\cos(315°) + i\sin(315°)\right).$$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt{2}\left(\cos(105° + k\cdot 120°) + i\sin(105° + k\cdot 120°)\right), \quad k = 0,1,2.$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos(105°) + i\sin(105°)\right),\\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos(225°) + i\sin(225°)\right),\\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos(345°) + i\sin(345°)\right). \end{aligned}$$

3. Számítsa ki az $A(1,0,2), B(5,1,0), C(3,-1,1)$ csúcspontú háromszög területét. (5 pont)

Megoldás. A háromszög két, egy csúcsból induló oldalvektorai $\overrightarrow{AB} = (4,1,-2)$ és $\overrightarrow{AC} = (2,-1,-1)$. A két vektor vektoriális szorzatának hossza a háromszög területének kétszerese.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|(-3,0,-6)\right| = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

4. Számítsa ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. Gauss-Jordan módszerrel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1/2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

Adjungált segítségével:

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{1 \cdot (-2-6) + 1(4-(-2))} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1/2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$