A2 MINTA(B) 1. zárthelyi – Megoldások

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{3+x}}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás. A függvény a -3-ban nem korlátos, így ott közelítjük:

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{(3+x)}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-3+\varepsilon}^{0} (3+x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{(3+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{-3+\varepsilon}^{0} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[2\sqrt{3+x}\right]_{-3+\varepsilon}^{0} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon} = 2\sqrt{3} - 2\cdot 0 = 2\sqrt{3}.$$

Az integrál konvergens, határértéke $2\sqrt{3}$.

2. Keresse meg a $z^3 - 7z^2 + 16z - 10$ polinom gyökeit a komplex számok körében. (5 pont)

Megoldás. A valós gyökök osztói a 10-nek, így a $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ és± 10 lehetnek. $z_1 = 1$-et behelyettesítve $1^3 - 7\cdot 1^2 + 16\cdot 1 - 10 = 0$ teljesül így, polinomosztás után

$$z^3 - 7z^2 + 16z - 10 = (z-1)(z^2 - 6z + 10).$$

Az első gyök, tehát a $z_1 = 1$. Megoldóképlet alapján a további gyökök

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 10}}{2} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i.$$

3. Írja fel a $P(1,1,2)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (3,-2,5)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsa ki a $Q(-1,0,2)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát. (5 pont)

Megoldás. A sík egyenlete

$$3(x-1) - 2(y-1) + 5(z-2) = 0, \text{ azaz}$$

$$3x - 2y + 5z = 11.$$

A Q pont erre nem illeszkedik, mivel $3\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 5\cdot 2 = 7$. Így a pont távolsága a Hesse-féle normálalak segítségével számolva

$$d(Q,s) = \left|\frac{3\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 5\cdot 2 - 11}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{38}}\right| = \frac{4}{\sqrt{38}}.$$

4. Döntse el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy sem:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} \right\}.$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 0 \cdot \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -6\lambda_1 + 9\lambda_2 - 11\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből adódik, hogy

$$\lambda_3 = -3\lambda_2.$$

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - 9\lambda_2 = \lambda_1 - 7\lambda_2 = 0,$$

azaz $\lambda_1 = 7\lambda_2$. Így a harmadik egyenlet

$$-6\lambda_1 + 9\lambda_2 - 11\lambda_3 = -42\lambda_2 + 9\lambda_2 + 33\lambda_2 = 0$$

mindig teljesül. Ha tehát mondjuk $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_1 = 7$, $\lambda_3 = -3$ akkor a vektorok kombinációja nullát ad:

$$7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Azaz a vektorok lineárisan összefüggőek, hiszen nem csak a triviális lineáris kombinációjuk adja ki a nullvektort.