A2 1. zárthelyi (A) - MEGOLDÁSOK 2024. március 19.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x =$$

(1 pont)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[2\sqrt{x-2}\right]_{2+\varepsilon}^3$$

(1 pont)

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2\sqrt{3-2} - 2\sqrt{2+\varepsilon-2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) =$$

(1 pont)

$$= 2 - 0 = 2.$$

(1 pont)

Tehát az improprius integrál konvergens. (1 pont)

2. Legyen $z = -2-2i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki az negyedik hatványát és a harmadik gyökeit! (5 pont)

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$\cos(\varphi) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $\sin(\varphi) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alapján $\varphi = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos(225^\circ) + i\sin(225^\circ)\right).$$

(2 pont)

$$z^4 = (2\sqrt{2})^4\left(\cos(4\cdot 225^\circ) + i\sin(4\cdot 225^\circ)\right) = 64\left(\cos(900^\circ) + i\sin(900^\circ)\right) =$$
$$= 64\left(\cos(180^\circ) + i\sin(180^\circ)\right) (= -64).$$

(1 pont)

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,(\cos(75^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(75^\circ + k \cdot 120^\circ))\,, \quad k = 0, 1, 2.$ (1 pont)

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\,(\cos(75^\circ) + i \sin(75^\circ))\,, \\ z_2 &= \sqrt{2}\,(\cos(195^\circ) + i \sin(195^\circ))\,, \\ z_3 &= \sqrt{2}\,(\cos(315^\circ) + i \sin(315^\circ))\,. \end{aligned}$$

(1 pont)

3. Mutassa meg, hogy az $x - y + 3z = -1$ és a $-x + y - 3z = 2$ egyenletű síkok párhuzamosak, és határozza meg a két sík távolságát. (5 pont)

Megoldás. Az első sík normálvektora $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 3)$, míg a másodiké $\mathbf{n}_2 = (-1, 1, -3)$. Látható, hogy $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, azaz a két sík valóban párhuzamos. (2 pont)

A két sík távolságának a kiszámításához válasszunk egy Q pontot az első síkról. Legyen mondjuk $Q(0, 1, 0)$, mert ez rajta van a síkon, kielégíti az egyenletet: $0 - 1 + 3 \cdot 0 = -1$. (1 pont)

A két párhuzamos sík távolsága a Q pont távolsága a második síktól, ami

$$\left| \frac{-0 + 1 - 3 \cdot 0 - 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{11}} \right| = \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

(2 pont)

4. Döntse el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy összefüggőek:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(5 pont)

Megoldás. A három vektor lineáris kombinációja a nullvektor, ha

$$\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(1 pont)

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 5\alpha + 4\beta - \gamma &= 0, \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 0, \\ 2\alpha + 3\beta &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből adódik, hogy

$$\alpha = -\frac{3}{2}\beta.$$

Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe

$$\frac{3}{2}\beta + 2\beta + \gamma = 0, \quad \text{azaz} \quad \gamma = -\frac{7}{2}\beta.$$

Így az első egyenletből

$$-\frac{15}{2}\beta + 4\beta + \frac{7}{2}\beta = \left(-\frac{15}{2} + \frac{8}{2} + \frac{7}{2}\right)\beta = 0 \cdot \beta = 0.$$

(3 pont)

mindig teljesül. Azaz a vektorok lineárisan összefüggőek, hiszen nem csak a triviális lineáris kombinációjuk adja ki a nullvektort. (1 pont)

(Például ha $\beta = 2$ és $\alpha = -3$, $\gamma = -7$, akkor a vektorok ezen kombinációja a nullvektort adja.)