A2 1. zárthelyi (A) - MEGOLDÁSOK 2025. március 18.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}\,\mathrm{d}x =$$

(1 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^c (2x+1)^{-3/2}\cdot 2\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\left[(-2)(2x+1)^{-1/2}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{2x+1}}\right]_1^c =$$

(2 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2c+1}} - \frac{-1}{\sqrt{2+1}} = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(1 pont)

Tehát az integrál konvergens, határértéke $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1 pont)

2. Legyen $z = 3-3i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a harmadik gyökeit!

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja:

$r = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\cos(\arg(z)) = 3/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ ill. $\sin(\arg(z)) = -3/(3\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$, alapján $\arg(z) = 315°$,

$$z = \sqrt{18}\left(\cos(315°) + i\sin(315°)\right).$$

(2 pont)

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{18}\left(\cos(105° + k\cdot 120°) + i\sin(105° + k\cdot 120°)\right), \quad k = 0,1,2.$

$$z_1 = \sqrt[6]{18}\left(\cos(105°) + i\sin(105°)\right),$$
$$z_2 = \sqrt[6]{18}\left(\cos(225°) + i\sin(225°)\right),$$
$$z_3 = \sqrt[6]{18}\left(\cos(345°) + i\sin(345°)\right).$$

(3 pont)

3. Bontsa fel a $\mathbf{v} = (3, -2, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (-2, 1, 1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

Megoldás. A párhuzamos komponens:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} = \frac{-6-2+5}{4+1+1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-3}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

(3 pont)

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \\ 11/2 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

4. A p valós paraméter függvényében számoljuk ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ p & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A determináns értéke

$$2(-1-6) - (-4)(p - (-10)) + 1(3p - 5) = -14 + 4p + 40 + 3p - 5 = 7p + 21.$$

(3 pont)

Ha $7p + 21 = 0$, akkor a a determináns értéke nulla (ekkor lesz a mátrix szinguláris). (1 pont)

Így $p = -3$ esetén lesz a mátrix szinguláris. (1 pont)