A2 1. zárthelyi (B) - MEGOLDÁSOK 2024. március 19.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\,\mathrm{d}x =$$

(1 pont)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{2+\varepsilon}^3 (x-2)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right]_{2+\varepsilon}^3$$

(1 pont)

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(3-2)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2+\varepsilon-2)^2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{1^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right) =$$

(1 pont)

$$= \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

(1 pont)

Tehát az improprius integrál konvergens. (1 pont)

2. Legyen $z = 2 + 2i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a huszadik hatványát és a harmadik gyökeit! (5 pont)

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja

$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$\cos(\varphi) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $\sin(\varphi) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alapján $\varphi = 45°$,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos(45°) + i\sin(45°)\right).$$

(2 pont)

$$z^{20} = (2\sqrt{2})^{20}\left(\cos(20\cdot 45°) + i\sin(20\cdot 45°)\right) = 8^{10}\left(\cos(900°) + i\sin(900°)\right) =$$
$$= 8^{10}\left(\cos(180°) + i\sin(180°)\right) (= -8^{10}).$$

(1 pont)

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,(\cos(15° + k \cdot 120°) + i \sin(15° + k \cdot 120°))\,, \quad k = 0, 1, 2.$ (1 pont)

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\,(\cos(15°) + i \sin(15°))\,, \\ z_2 &= \sqrt{2}\,(\cos(135°) + i \sin(135°))\,, \\ z_3 &= \sqrt{2}\,(\cos(255°) + i \sin(255°))\,. \end{aligned}$$

(1 pont)

3. Mutassa meg, hogy a $3x - 3y + z = -1$ és a $-3x + 3y - z = 2$ egyenletű síkok párhuzamosak, és határozza meg a két sík távolságát. (5 pont)

Megoldás. Az első sík normálvektora $\mathbf{n}_1 = (3, -3, 1)$, míg a másodiké $\mathbf{n}_2 = (-3, 3, -1)$. Látható, hogy $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, azaz a két sík valóban párhuzamos. (2 pont)

A két sík távolságának a kiszámításához válasszunk egy Q pontot az első síkról. Legyen mondjuk $Q(0, 0, -1)$, mert ez rajta van a síkon, kielégíti az egyenletet: $3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + (-1) = -1$. (1 pont)

A két párhuzamos sík távolsága a Q pont távolsága a második síktól, ami

$$\left| \frac{-3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - (-1) - 2}{\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{19}} \right| = \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

(2 pont)

4. Döntse el, hogy a következő $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy összefüggőek:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(5 pont)

Megoldás. A három vektor lineáris kombinációja a nullvektor, ha

$$\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(1 pont)

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 5\alpha - \beta + 2\gamma &= 0, \\ 4\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0, \\ -\alpha + \beta &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből adódik, hogy

$$\alpha = \beta.$$

Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe

$$4\beta + 2\beta + 3\gamma = 0, \quad \text{azaz} \quad \gamma = -2\beta.$$

Így az első egyenletből

$$5\beta - \beta + 2 \cdot (-2)\,\beta = (5 - 1 - 4)\,\beta = 0 \cdot \beta = 0.$$

(3 pont)

mindig teljesül. Azaz a vektorok lineárisan összefüggőek, hiszen nem csak a triviális lineáris kombinációjuk adja ki a nullvektort. (1 pont)

(Például ha $\beta = 1$ és $\alpha = 1$, $\gamma = -2$, akkor a vektorok ezen kombinációja a nullvektort adja.)