A2 1. zárthelyi (B) - MEGOLDÁSOK 2025. március 18.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^3}}\,\mathrm{d}x =$$

(1 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\frac{1}{3}\int_1^c (3x+1)^{-3/2}\cdot 3\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{3}\left[(-2)(3x+1)^{-1/2}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{-2}{\sqrt{3x+1}}\right]_1^c =$$

(2 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\frac{-2}{3\sqrt{3c+1}} - \frac{-2}{3\sqrt{3+1}} = 0 + \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(1 pont)

Tehát az integrál konvergens, határértéke $\frac{1}{3}$. (1 pont)

2. Legyen $z = 3+3i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a harmadik gyökeit!

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja:

$r = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\cos(\arg(z)) = 3/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ ill. $\sin(\arg(z)) = 3/(3\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, alapján $\arg(z) = 45°$,

$$z = \sqrt{18}\left(\cos(45°) + i\sin(45°)\right).$$

(2 pont)

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{18}\left(\cos(15° + k\cdot 120°) + i\sin(15° + k\cdot 120°)\right), \quad k = 0,1,2.$$

$$z_1 = \sqrt[6]{18}\left(\cos(15°) + i\sin(15°)\right),$$
$$z_2 = \sqrt[6]{18}\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right),$$
$$z_3 = \sqrt[6]{18}\left(\cos(255°) + i\sin(255°)\right).$$

(3 pont)

3. Bontsa fel a $\mathbf{v} = (3, -2, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (-2, -2, 1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

Megoldás. A párhuzamos komponens:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} = \frac{-6+4+5}{4+4+1}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

(3 pont)

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ -4/3 \\ 14/3 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

4. A p valós paraméter függvényében számoljuk ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ p & -5 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A determináns értéke

$$2(-5-9) - (-4)(p+15) + 1(3p-25) = -28 + 4p + 60 + 3p - 25 = 7p + 7.$$

(3 pont)

Ha $7p + 7 = 0$, akkor a a determináns értéke nulla (ekkor lesz a mátrix szinguláris). (1 pont)

Így $p = -1$ esetén lesz a mátrix szinguláris. (1 pont)