

A2 1. zárthelyi (D) - MEGOLDÁSOK 2025. március 18.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3x-1)^3}} dx$$

Megoldás.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(3x-1)^3}} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{(3x-1)^3}} dx =$$

(1 pont)

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_1^c (3x-1)^{-3/2} \cdot 3 dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{3} [(-2)(3x-1)^{-1/2}]_1^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[\frac{-2}{\sqrt{3x-1}} \right]_1^c =$$

(2 pont)

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{-2}{3\sqrt{3c-1}} - \frac{-2}{3\sqrt{3-1}} = 0 + \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(1 pont)

Tehát az integrál konvergens, határértéke $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(1 pont)

2. Legyen $z = 2 + 2i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a harmadik gyökeit!

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja:

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos(\arg(z)) = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2} \quad \text{ill.} \quad \sin(\arg(z)) = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}, \quad \text{alapján } \arg(z) = 45^\circ,$$

$$z = \sqrt{8} (\cos(45^\circ) + i \sin(45^\circ)).$$

(2 pont)

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{8} (\cos(15^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(15^\circ + k \cdot 120^\circ)), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$z_1 = \sqrt[6]{8} (\cos(15^\circ) + i \sin(15^\circ)),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{8} (\cos(135^\circ) + i \sin(135^\circ)),$$

$$z_3 = \sqrt[6]{8} (\cos(255^\circ) + i \sin(255^\circ)).$$

(3 pont)

3. Bontsa fel a $\mathbf{v} = (3, -5, 2)$ vektort az $\mathbf{a} = (-2, -2, 1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

Megoldás. A párhuzamos komponens:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} = \frac{-6 + 10 + 2}{4 + 4 + 1} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

(3 pont)

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ -11/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

4. A p valós paraméter függvényében számoljuk ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ p & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A determináns értéke

$$2(2 - 9) - (-4)(p + 15) + 1(3p + 10) = -14 + 4p + 60 + 3p + 10 = 7p + 56.$$

(3 pont)

Ha $7p + 56 = 0$, akkor a a determináns értéke nulla (ekkor lesz a mátrix szinguláris). (1 pont)

Így $p = -8$ esetén lesz a mátrix szinguláris. (1 pont)