A2 MINTA(A) 1. zárthelyi – Megoldások

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2-x)^3}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{(2-x)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_3^{c}(2-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{(2-x)^{-2}}{(-2)(-1)}\right]_3^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left[\frac{1}{2(2-x)^2}\right]_3^c = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2(2-c)^2} - \frac{1}{2(-1)^2} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Számolja ki az $2-2i$ komplex szám harmadik gyökeit! (5 pont)

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja

$r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$\cos(\arg(z)) = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ ill. $\sin(\arg(z)) = -2/(2\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$, alapján $\arg(z) = 315°$,

$$z = \sqrt{8}\left(\cos(315°) + i\sin(315°)\right).$$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt{2}\left(\cos(105° + k\cdot 120°) + i\sin(105° + k\cdot 120°)\right), \quad k = 0, 1, 2.$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos(105°) + i\sin(105°)\right),$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos(225°) + i\sin(225°)\right),$$
$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos(345°) + i\sin(345°)\right).$$

3. Számítsa ki az $A(1,0,2), B(5,1,0), C(3,-1,1)$ csúcspontú háromszög területét. (5 pont)

Megoldás. A háromszög két, egy csúcsból induló oldalvektorai $\overrightarrow{AB} = (4,1,-2)$ és $\overrightarrow{AC} = (2,-1,-1)$. A két vektor vektoriális szorzatának hossza a háromszög területének kétszerese.

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|(-3,0,-6)\right| = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

4. Határozza meg a $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{b}$ szorzat eredményét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \left(1/3,\ -3,\ 4/3\right)\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{3} + 6 + 3\cdot\tfrac{4}{3},\ -\tfrac{4}{3} - 3 - \tfrac{4}{3},\ \tfrac{2}{3} - 6 + 0\right) = \left(10\tfrac{1}{3},\ -5\tfrac{2}{3},\ -5\tfrac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{31}{3},\ \frac{-17}{3},\ \frac{-16}{3}\right).$$

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{b} = \left(\frac{31}{3},\ \frac{-17}{3},\ \frac{-16}{3}\right)\begin{pmatrix} 1/3 \\ -3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{31}{3}\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot\frac{-17}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{-16}{3} = \frac{31 + 153 - 64}{9} = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}.$$