A2 1. zárthelyi (A) - MEGOLDÁSOK 2023. április 3.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_0^{+\infty} xe^{-4x}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\int_0^{\infty} xe^{-4x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^{c} xe^{-4x}\,\mathrm{d}x =$$

(1 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\left[x\cdot\frac{e^{-4x}}{-4}\right]_0^c - \int_0^c \frac{e^{-4x}}{-4}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[x\cdot\frac{e^{-4x}}{-4} - \frac{e^{-4x}}{16}\right]_0^c =$$

(2 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{c}{4e^{4c}} - \frac{1}{16e^{4c}}\right) - \left(0 - \frac{1}{16}\right) =$$

(1 pont)

$$= 0 + \frac{1}{16}.$$

(1 pont)

2. Legyen $z = -1 + \sqrt{3}i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a negyedik gyökeit!

(5 pont)

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$

$\cos(\arg(z)) = -1/2$ ill. $\sin(\arg(z)) = \sqrt{3}/2$, alapján $\arg(z) = 120°$,

$$z = 2\left(\cos(120°) + i\sin(120°)\right).$$

(2 pont)

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}\left(\cos(30° + k\cdot 90°) + i\sin(30° + k\cdot 90°)\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$ (2 pont)

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(30°) + i\sin(30°)\right),$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(120°) + i\sin(120°)\right),$$
$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(210°) + i\sin(210°)\right),$$
$$z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(300°) + i\sin(300°)\right).$$

(1 pont)

3. Írja fel a $P(1,-1,2)$ ponton átmenő $\mathbf{n}=(2,0,-5)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsa ki a $Q(1,-3,1)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát! (5 pont)

Megoldás. A sík egyenlete: $2x-5z=-8$. (2 pont)
Ennek a Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{2x-5z+8}{\sqrt{2^2+0^2+(-5)^2}}=0.$$

(1 pont)

A Q pontnak ettől a síktól való távolsága:

$$\left|\frac{-3+8}{\sqrt{29}}\right|=\frac{5}{\sqrt{29}}.$$

(2 pont)

4. A p valós paraméter függvényében számoljuk ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & p\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

(5 pont)

Megoldás. A determináns értéke

$$-2(4-p)-1(-4-3p)+2(-1-3)=-8+2p+4+3p-8=5p-12.$$

(3 pont)

Így $p=12/5$ esetén lesz a determináns értéke nulla. (2 pont)