A2 1. zárthelyi (B) - MEGOLDÁSOK 2023. április 3.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^{c} xe^{-3x}\,\mathrm{d}x =$$

(1 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\left[x\cdot\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^c - \int_0^c \frac{e^{-3x}}{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[x\cdot\frac{e^{-3x}}{-3} - \frac{e^{-3x}}{9}\right]_0^c =$$

(2 pont)

$$= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{c}{3e^{3c}} - \frac{1}{9e^{3c}}\right) - \left(0 - \frac{1}{9}\right) =$$

(1 pont)

$$= 0 + \frac{1}{9}.$$

(1 pont)

2. Legyen $z = -1 - \sqrt{3}i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a negyedik gyökeit!

(5 pont)

Megoldás. A komplex szám trigonometrikus alakja

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$

$\cos(\arg(z)) = -1/2$ ill. $\sin(\arg(z)) = -\sqrt{3}/2$, alapján $\arg(z) = 240°$,

$$z = 2\left(\cos(240°) + i\sin(240°)\right).$$

(2 pont)

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2}\left(\cos(60° + k\cdot 90°) + i\sin(60° + k\cdot 90°)\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$ (2 pont)

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(60°) + i\sin(60°)\right),$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(150°) + i\sin(150°)\right),$$
$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(240°) + i\sin(240°)\right),$$
$$z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(330°) + i\sin(330°)\right).$$

(1 pont)

3. Írjuk fel a $P(1,-3,1)$ ponton átmenő $\mathbf{n}=(2,0,-5)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(1,-1,2)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát. (5 pont)

Megoldás. A sík egyenlete: $2x-5z=-3$. (2 pont)
Ennek a Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{2x-5z+3}{\sqrt{2^2+0^2+(-5)^2}}=0.$$

(1 pont)

A Q pontnak ettől a síktól való távolsága:

$$\left|\frac{-8+3}{\sqrt{29}}\right|=\frac{5}{\sqrt{29}}.$$

(2 pont)

4. A p valós paraméter függvényében számoljuk ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ p & 1 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

(5 pont)

Megoldás. A determináns értéke

$$-2(4+1)-1(4p+3)+2(p-3)=-10-4p-3+2p-6=-2p-19.$$

(3 pont)
Így $p=-19/2$ esetén lesz a determináns értéke nulla. (2 pont)