A2 2. zárthelyi (A) - MEGOLDÁSOK 2023. május 16.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az egyenletrendszer megoldását az "a" paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} 3x + 2y + a \cdot z &= -1 \\ x - y - 4z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & -1 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & a & -1 \end{array}\right) \underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 - s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & a-6 & -1 \end{array}\right) \overset{s_3 - \frac{1}{2}s_2}{\sim}$$

$$\overset{s_3 - \frac{1}{2} \cdot s_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

(2 pont)

Ha $a = 3$, akkor $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = 2 < \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ nincsen megoldás. (1 pont)

Ha $a \neq 3$, akkor $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ =változók száma, ekkor egy megoldás létezik.

(1 pont)

A megoldást pedig,

$$\begin{aligned} &\text{mivel } (a-3)z = -\frac{3}{2}, \text{ ezért } z = -\frac{3}{2a-6}, \\ &\text{mivel } -2y - 6z = 1, \text{ ezért } y = -\frac{1}{2} - 3z = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2a-6}, \\ &\text{mivel } x + y + 2z = 0, \text{ ezért } x = -y - 2z = \frac{1}{2} + 3z - 2z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2a-6}, \end{aligned}$$

számhármasok alkotják. (1 pont)

2. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és egyik sajátértékéhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)\Big((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\Big) = (7-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) =$$
$$= (7-\lambda)(\lambda)(\lambda-3).$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 3$. (2 pont)
A sajátvektorok $\lambda_1 = 7$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} -6x & -y & +z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ 2x & -2y & -5z & = 0 \end{array} .$$

Tehát $2x = 2y + 5z$, és $6x = -y + z$, azaz $7y = -14z$, $y = -2z$. Továbbá $-6x + 2z + z = 0$ és $2x + 4z - 5z = 0$, azaz $x = \frac{1}{2}z$ Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(3 pont)

VAGY $\lambda_2 = 0$ esetén:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY $\lambda_3 = 3$ esetén:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Számítsa ki az $f(x,y) = x \cdot \ln(xy)$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(1,2)$ pontban, majd állapítsa meg itt az $\alpha = 45°$ irányban vett iránymenti deriváltat is!

(5 pont)

Megoldás. Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = \ln(xy) + x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \ln(xy) + 1,$$
$$f'_y(x,y) = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}.$$

(2 pont)

Ezek értéke a $P(1,2)$ pontban: $f'_x(1,2) = \ln(2) + 1$ és $f'_y(1,2) = \dfrac{1}{2}$. (1 pont)
Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathbf{grad} f(P) = (\ln(2) + 1, \frac{1}{2})$. Az irányvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(45°) \\ \sin(45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(1 pont)

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_\alpha(P) = (\ln(2) + 1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

(1 pont)

4. Határozza meg az $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 7y$ függvény lokális szélsőértékeit.

(5 pont)

Megoldás. Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \quad 4x + y, \\ f'_y(x,y) &= \; x + 2y + 7, \end{aligned}$$

(2 pont)

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y &= -4x, \\ x - 8x + 7 &= 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x = 1,\ y = -4,$$

Egyetlen stacionárius pont van $P\,(1, -4)$. (1 pont)

A Hesse mátrix determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 1 = 7,$$

(1 pont)

Tehát P lokális minimumhely, mivel $\det(\mathbf{Hesse} f(P)) = 7 > 0$, és $f''_{xx}(P) = 4 > 0$. (1 pont)

A szélsőérték pedig $f(P) = -14$.