A2 2. zárthelyi (B) - MEGOLDÁSOK 2023. május 16.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az egyenletrendszer megoldását a "b" paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= b \\ x - y - 8z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 1 & b \\ 1 & -1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 - s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & b \end{array}\right) \overset{s_3 - \frac{1}{2}s_2}{\sim}$$

$$\overset{s_3 - \frac{1}{2}\cdot s_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b - \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(2 pont)

Ha $b \neq \frac{1}{2}$, akkor $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = 2 < \mathrm{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ nincsen megoldás. (1 pont)

Ha $b = \frac{1}{2}$, akkor $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 <$változók száma, ekkor végtelen sok megoldás létezik.
(1 pont)

A megoldást pedig,

$$\text{mivel } -2y - 10z = 1, \text{ ezért } y = -\frac{1}{2} - 5z,$$

$$\text{mivel } x + y + 2z = 0, \text{ ezért } x = -y - 2z = \frac{1}{2} + 5z - 2z = \frac{1}{2} + 3z,$$

számhármasok alkotják. (1 pont)

2. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és egyik sajátértékéhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\Big((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\Big) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) =$$
$$= (-1)(1+\lambda)(\lambda)(\lambda - 3).$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 3$. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_1 = -1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rrrl} 2x & -y & +z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ 2x & -2y & +3z & = 0 \end{array}.$$

Tehát $2x = y - z$, és $2x = 2y - 3z$, azaz $y = 2z$. Továbbá $2x - 2z + z = 0$ és $2x - 4z + 3z = 0$, azaz $x = \frac{1}{2}z$ Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(3 pont)

VAGY $\lambda_2 = 0$ esetén:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY $\lambda_3 = 3$ esetén:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3. Számítsa ki az $f(x, y) = y \cdot \ln(xy)$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(1, 2)$ pontban, majd állapítsa meg itt az $\alpha = 45°$ irányban vett iránymenti deriváltat is!

(5 pont)

Megoldás. Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x, y) = y \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{y}{x},$$
$$f'_y(x, y) = \ln(xy) + y \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \ln(xy) + 1.$$

(2 pont)

Ezek értéke a $P(1, 2)$ pontban: $f'_x(1, 2) = 2$ és $f'_y(1, 2) = \ln(2) + 1$. (1 pont)

Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathbf{grad} f(P) = (2, \ln(2) + 1)$. Az irányvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos(45°) \\ \sin(45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(1 pont)

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_\alpha(P) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (\ln(2) + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(1 pont)

4. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + 3xy + 3y^2 + 9y$ függvény lokális szélsőértékeit.

(5 pont)

Megoldás. Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x, y) = 2x + 3y,$$
$$f'_y(x, y) = 3x + 6y + 9,$$

(2 pont)

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \ \ 0 \\ f'_y(x,y) &= \ \ 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x \qquad\qquad &= -\tfrac{3}{2}y, \\ -\tfrac{9}{2}y + 6y + 9 \quad &= 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad y = -6,\ x = 9,$$

Egyetlen stacionárius pont van $P\,(9, -6)$. (1 pont)

A Hesse mátrix determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 9 = 3,$$

(1 pont)

Tehát P lokális minimumhely, mivel $\det(\mathbf{Hesse} f(P)) = 3 > 0,$ és $f''_{xx}(P) = 2 > 0.$ (1 pont)

A szélsőérték pedig $f(P) = -27.$