A2 pótzárthelyi - MEGOLDÁSOK 2024. május 14.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. ZÁRTHELYI

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_3^\infty \frac{4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

(5 pont)

Megoldás.
Először az integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással. Mivel $x^2-4=(x-2)(x+2)$, így

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az A, B együtthatókat beszorzás után kapott egyenletrendszerből kapjuk:

$$\begin{aligned}4&=A(x+2)+B(x-2)\\4&=(A+B)x+2A-2B,\end{aligned}$$

amiből $A+B=0$, és $2A-2B=4$. Ebből $A=1, B=-1$, és így

$$\int \frac{4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja, mivel a nevező $x=\pm2$-ben nulla, így 3-tól integrálható:

$$\int_3^\infty \frac{4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_3^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{b-2}{b+2}\right|-\ln\left|\frac{3-2}{3+2}\right|=\ln(1)-\ln\left(\frac{1}{5}\right)=-\ln(0,2)=\ln(5).$$

2. Keresse meg a z^3-2z^2-2z-3 polinom gyökeit a komplex számok körében, és írja fel gyöktényezős alakban! (5 pont)

Megoldás. A valós gyökök osztói a -3-nak, így a ±1 és±3 lehetnek. $z_1=3$-at behelyettesítve $3^3-2\cdot3^2-2\cdot3-3=27-18-6-3=0$ teljesül így, polinomosztás után

$$z^3-2z^2-2z-3=(z-3)(z^2+z+1).$$

Az első gyök, tehát a $z_1=3$. Megoldóképlet alapján a további gyökök

$$z_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Így a gyöktényezős alak

$$z^3 - 2z^2 - 2z - 3 = (z-3)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

3. Határozza meg az $\mathbf{a} = (-4, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -3)$ és $\mathbf{c} = (5, 1, -1)$ vektorok vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát. (5 pont)

Megoldás.

$$[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-2+3) - 1\cdot(-1+15) = -4 - 14 = -18.$$

Az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata ennek abszolút értéke, azaz 18.

4. Döntse el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy sem:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \quad \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet alapján $\lambda_3 = -\lambda_1$. A második egyenletből így $2\lambda_2 = 3\lambda_1 + 2(-\lambda_1) = \lambda_1$, azaz $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1$. Ekkor az utolsó egyenletet felhasználva kapjuk, hogy

$$-3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -3\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_1 = -3,5\lambda_1 = 0,$$

azaz $\lambda_1 = 0$. Tehát $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ami azt jelenti, hogy ezen vektorok lineárisan függetlenek.

2. ZÁRTHELYI

1. Határozza meg az összes olyan $\mathbf{x}$ vektort, amelyre teljesül, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(5 pont)

Megoldás. Az egyenletet átrendezve

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A^{-1}b} \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ha az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-2 - 1) - 2(1 - 2) = -3 + 2 = -1,$$

tehát a mátrix invertálható. Az adjungált segítségével az inverz

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = (-1) \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Így az ismeretlen vektor:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Határozza meg az alábbi mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 & 10 \\ -2 & -3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(5 pont)

Megoldás. Sor- és oszloptranszformációkkal alakíthatjuk a mátrixok például így:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 & 10 \\ -2 & -3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -4 \\ 4 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az utolsó mátrixban két "lépcső" szerepel, így a mátrix rangja 2.

3. Határozza meg az egyenletrendszer megoldását az "a" paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} 2x - 3y + a\,z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0 \\ x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & a & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_1 \leftrightarrow \mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & a & 0 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3 - 2\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2 - 3\mathbf{s}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & a+2 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{10}\mathbf{s}_2}{\sim}$$

$$\overset{-\frac{1}{10}\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -9 & a+2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3 + 9\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & a - 5/2 & 0 \end{array}\right)$$

Ha $a - \frac{5}{2} \neq 0$, azaz $a \neq \dfrac{5}{2}$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ =változók száma, ekkor egy darab egyértelmű megoldás létezik, amely az $x = y = z = 0$ triviális megoldás, mivel az egyenletrendszer homogén.

Ha $a = \dfrac{5}{2}$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ <változók száma, ekkor végtelen sok megoldás létezik. A megoldások kielégítik az

$$y - \frac{1}{2}z = 0, \text{ azaz } y = \frac{1}{2}z,$$

és

$$x + 3y - z = 0, \text{ azaz } x = -3y + z = -\frac{3}{2}z + z = -\frac{1}{2}z$$

egyenleteket, így

$$z \in \mathbb{R}, \quad y = \frac{1}{2}z, \quad x = -\frac{1}{2}z$$

számhármasok alkotják az egyenletrendszer megoldását.

4. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és az egyik sajátértékhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda) - 1) - 2(2(1-\lambda)) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 4) - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - 6)\lambda.$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 6$.

A sajátvektorok $\lambda_1 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} x & +2y & & = 0 \\ 2x & +5y & -z & = 0 \\ & y & -z & = 0 \end{array}.$$

Így $x = -2y$, és $z = y$ az első és utolsó egyenletekből. Ekkor $2x + 5y - z = -4y + 5y - y = 0$ is teljesül, tehát a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY

A sajátvektorok $\lambda_2 = 1$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} & 2y & & = 0 \\ 2x & +4y & -z & = 0 \\ & -y & & = 0 \end{array}.$$

Tehát $y = 0$, így $2x - z = 0$, tehát $z = 2x$, ahol x szabadon választható. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY

A sajátvektorok $\lambda_1 = 6$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} -5x & +2y & & = 0 \\ 2x & -y & -z & = 0 \\ & -y & -5z & = 0 \end{array}.$$

Így $x = \frac{2}{5}y$, és $z = -\frac{1}{5}y$ az első és utolsó egyenletekből. Ekkor $2x - y - z = \frac{4}{5}y - y + \frac{1}{5}y = 0$ is teljesül, tehát a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}y \\ y \\ -\frac{1}{5}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$