

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx$$

Megoldás.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2 + x} dx \quad (1 \text{ pont})$$

A tört résztörtekre bontásával:

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$$

$$A + B = 0 \text{ és } A = 1, \text{ tehát } B = -1$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2 + x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx - \int_1^b \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right]_1^b \quad (2 \text{ pont})$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{b}{b+1} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln(1) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = 0 + \ln(2) = \ln(2). \quad (1 \text{ pont})$$

Az integrál konvergens, határértéke $\ln(2)$.

2. Legyen $z = -8i$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a negyedik hatványát és a harmadik gyökeit.

Megoldás. A $z = -8i$ komplex szám abszolútértéke: $r = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8$ és argumentuma:

$$\sin(\varphi) = -1 \rightarrow 270^\circ; \quad \cos(\varphi) = 0 \rightarrow 90^\circ, 270^\circ;$$

Így a trigonometrikus alak: $z = 8(\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ))$. (1 pont)

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned} z^4 &= (8)^4 (\cos(4 \cdot 270^\circ) + i \sin(4 \cdot 270^\circ)) = 2^{12} (\cos(1080^\circ) + i \sin(1080^\circ)) = \\ &= 2^{12} (\cos(0^\circ) + i \sin(0^\circ)) = 2^{12} = 4096. \end{aligned} \quad (1 \text{ pont})$$

A z komplex számnak három z_1, z_2, z_3 köbgyöke van:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{270^\circ}{3} \right) + i \sin \left(\frac{270^\circ}{3} \right) \right) = 2 (\cos(90^\circ) + i \sin(90^\circ)) = 2i, \\ z_2 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{270^\circ + 360^\circ}{3} \right) + i \sin \left(\frac{270^\circ + 360^\circ}{3} \right) \right) = 2 (\cos(210^\circ) + i \sin(210^\circ)) = -\sqrt{3} - i, \\ z_3 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \left(\frac{270^\circ + 720^\circ}{3} \right) + i \sin \left(\frac{270^\circ + 720^\circ}{3} \right) \right) = 2 (\cos(330^\circ) + i \sin(330^\circ)) = \sqrt{3} - i. \end{aligned} \quad (3 \text{ pont})$$

3. Számítsa ki az $A(3, 2, -2), B(4, 1, -3), C(1, -2, 1)$ csúcspontú háromszög területét.

Megoldás. Legyen $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (-2, -4, 3)$. (1 pont)

Az ABC háromszög területe a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített paralelogramma területének a fele. Ami pontosan a $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-3 - 4, -(3 - 2), -4 - 2) = (-7, -1, -6)$ vektor hossza. (2 pont)

Ez utóbbi vektor hossza $\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{86}$. (1 pont)

Így a háromszög területe $\frac{\sqrt{86}}{2}$. (1 pont)

4. Számítsa ki a Gauss-Jordan módszerrel segítségével az alábbi mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Gauss-Jordan módszerrel az inverz

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

(5 pont)

A2 2.pótpótzárthelyi - MEGOLDÁSOK

2025. május 28.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az együtthatómátrix invertálásával az egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{aligned}2x + 2y - z &= -2 \\ -x + 3y + z &= 0 \\ -2x - y + z &= 1\end{aligned}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix invertálható, ha nem nulla a determinánsa

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(3+1) - 2(-1+2) - 1(1+6) = 8 - 2 - 7 = -1,$$

tehát a mátrix invertálható. Az adjungált segítségével az inverz

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Így az ismeretlenek vektora kifejezhető:

(3 pont)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait!

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0 \\ 3x - 3y - 5z &= 0 \\ x - 2y - 3z &= 0\end{aligned}$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathbf{s}_2 - 3\mathbf{s}_1 \\ \sim \\ \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \mathbf{s}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{s}_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(2 pont)

Tehát $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < \text{változók száma } (n = 3)$, ekkor végtelen sok megoldás létezik (melyek közül egy a $x = y = z = u = 0$ triviális megoldás, mivel az egyenletrendszer homogén). Egy változó szabadon választható:

$$\text{ha } z \in \mathbb{R}, \quad \text{akkor } -6y = 8z, \text{ azaz } y = -\frac{4}{3}z,$$

$$\text{továbbá } x = -y - z = \frac{4}{3}z - z = \frac{1}{3}z$$

az egyenletrendszer megoldásai.

(3 pont)

3. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és az egyik sajátértékhez tartozó sajátvektorokat!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5).$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 5$.

(2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_1 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x + 2y = 0 \\ 2x + 1y = 0 \end{matrix} \Rightarrow y = -2x, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY a sajátvektorok $\lambda_2 = 5$ esetén:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = 2y, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(3 pont)

4. Számítsa ki az $f(x, y) = \ln(x) \cdot y^2 + \frac{2x - y^3}{y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(1, 2)$ pontban, majd írja fel itt az érintősík egyenletét!

Megoldás. $f(1, 2) = \ln(1) \cdot 2^2 + \frac{2 \cdot 1 - 2^3}{2} = 0 + \frac{-6}{2} = -3$

$$f'_x(1, 2) = \frac{y^2}{x} + \frac{2}{y} \Big|_{(1,2)} = \frac{4}{1} + \frac{2}{2} = 5,$$

$$f'_y(1, 2) = 2 \ln(x)y - \frac{2x}{y^2} - 2y \Big|_{(1,2)} = 0 - \frac{2}{4} - 2 \cdot 2 = -\frac{9}{2},$$

(3 pont)

Így a P -beli érintősík egyenlete:

$$z = 5(x - 1) - \frac{9}{2}(y - 2) - 3$$

$$5x - \frac{9}{2}y - z = -1.$$

(2 pont)