

A2 2. zárthelyi (A) - MEGOLDÁSOK

2025. április 29.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszer megoldásában a "z" változó értékét!

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 1 \\ -2x - y + 4z &= 2 \\ 2x - 4y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

Megoldás. Az együtthatómátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(3 + 16) - 3(6 - 8) + 2(8 + 2) = -19 + 6 + 20 = 7,$$

nem nulla, tehát a szabály alkalmazható:

(2 pont)

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{(-1)(2 + 8) - 3(4 - 4) + 1(8 + 2)}{7} = \frac{-10 + 0 + 10}{7} = \frac{0}{7} = 0.$$

(3 pont)

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldását a "p" paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} 4x - 3y + pz &= 0 \\ 3x - y + 5z &= 0 \\ x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & p & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & p & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{s_2 - 3s_1 \\ s_3 - 4s_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & p-8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{s_3 - s_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p-7 & 0 \end{array} \right)$$

(1 pont)

Ha $p - 7 \neq 0$, azaz $p \neq 7$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 = \text{változók száma}$, ekkor egy darab egyértelmű megoldás létezik, amely az $x = y = z = 0$ triviális megoldás, mivel az egyenletrendszer homogén.

(2 pont)

Ha $p = 7$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < \text{változók száma}$, ekkor végtelen sok megoldás létezik. A megoldások kielégítik az

$$5y - z = 0, \text{ azaz } y = \frac{z}{5},$$

$$\text{és } x - 2y + 2z = 0, \text{ azaz } x = 2y - 2z = \frac{2}{5}z - 2z = -\frac{8}{5}z.$$

Így a $z \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1}{5}z$, $x = -\frac{8}{5}z$ számhármassok lesznek az egyenletrendszer megoldásai. (2 pont)

3. Határozza meg az alábbi mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(1-\lambda)) + (-2)(1-\lambda) =$$

$= (1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 2) = (1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$, melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 2$.
Tehát a legnagyobb sajátérték a 2. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_3 = 2$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rrcr} -x & +y & -z & = 0 \\ & -2y & +z & = 0 \\ -2x & & -z & = 0 \end{array}.$$

Az utolsó két egyenletből $z = -2x$ és $2y = z = -2x$, azaz $y = -x$, ezért az első egyenletből $-x - x + 2x = 0$ minig teljesül. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -2x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(3 pont)

4. Számítsa ki az $f(x, y) = x \ln(y) - \frac{x^2}{y^2}$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(-1, 1)$ pontban, majd írja fel itt az érintősík egyenletét!

Megoldás.

$$f(-1, 1) = (-1) \ln(1) - \frac{(-1)^2}{1^2} = 0 - 1 = -1$$

$$f'_x(-1, 1) = \ln(y) - \frac{2x}{y^2} \Big|_{(-1, 1)} = \ln(1) - \frac{-2}{1^2} = 0 + 2 = 2,$$

$$f'_y(-1, 1) = \frac{x}{y} - (-2) \frac{x^2}{y^3} \Big|_{(-1, 1)} = \frac{x}{y} + \frac{2x^2}{y^3} \Big|_{(-1, 1)} = \frac{-1}{1} + \frac{2}{1^3} = -1 + 2 = 1, \quad (3 \text{ pont})$$

Így a P -beli érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} z &= 2(x + 1) + 1(y - 1) - 1 \\ 2x - y + z &= 0. \end{aligned}$$

(2 pont)