

A2 2. zárthelyi (B) - MEGOLDÁSOK

2025. április 29.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszer megoldásában a "z" változó értékét!

$$-x - 2y + 2z = 1$$

$$3x - y - 4z = 2$$

$$2x + 4y - 3z = 0$$

Megoldás. Az együtthatómátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(3 + 16) - (-2)(-9 + 8) + 2(12 + 2) = -19 - 2 + 28 = 7,$$

nem nulla, tehát a szabály alkalmazható:

(2 pont)

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1(12 + 2) - 2(-4 + 4)}{7} = \frac{14}{7} = 2.$$

(3 pont)

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldását a "p" paraméter függvényében!

$$-x - 3y + pz = 0$$

$$3x - y + 5z = 0$$

$$x - 2y + 2z = 0$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & p & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & p & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[s_3 + s_1]{s_2 - 3s_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & p+2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{s_3 + s_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p+1 & 0 \end{array} \right)$$

(1 pont)

Ha $p + 1 \neq 0$, azaz $p \neq -1$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 = \text{változók száma}$, ekkor egy darab egyértelmű megoldás létezik, amely az $x = y = z = 0$ triviális megoldás, mivel az egyenletrendszer homogén.

(2 pont)

Ha $p = -1$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < \text{változók száma}$, ekkor végtelen sok megoldás létezik. A megoldások kielégítik az

$$5y - z = 0, \text{ azaz } y = \frac{z}{5},$$

$$\text{és } x - 2y + 2z = 0, \text{ azaz } x = 2y - 2z = \frac{2}{5}z - 2z = -\frac{8}{5}z.$$

Így a $z \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1}{5}z$, $x = -\frac{8}{5}z$ számhármassok lesznek az egyenletrendszer megoldásai. (2 pont)

3. Határozza meg az alábbi mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)-1) + (-2)(1-\lambda) =$$

$= (1-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 - 3) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1)$, melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 3$.
Tehát a legnagyobb sajátérték a 3. (2 pont)

A sajátvektorok $\lambda_3 = 2$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rrc} -2x & -2z & = 0 \\ x & -3y & +z = 0 \\ -x & +y & -z = 0 \end{array}.$$

Az első egyenletből $z = -x$. Ezt beírva a másodikba $x - 3y - x = 0$, azaz $y = 0$. Ezért a harmadik egyenlet $-x + 0 + x = 0$ minig teljesül. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(3 pont)

4. Számítsa ki az $f(x, y) = x^2 \ln(y) - \frac{x^2 + 3}{y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(-1, 1)$ pontban, majd írja fel itt az érintősík egyenletét!

Megoldás.

$$f(-1, 1) = (-1)^2 \ln(1) - \frac{(-1)^2 + 3}{1} = 0 - 4 = -4$$

$$f'_x(-1, 1) = 2x \ln(y) - \frac{2x}{y} \Big|_{(-1, 1)} = 2(-1) \ln(1) - \frac{-2}{1} = 0 + 2 = 2,$$

$$f'_y(-1, 1) = \frac{x^2}{y} - (-1) \frac{x^2 + 3}{y^2} \Big|_{(-1, 1)} = \frac{x^2}{y} + \frac{x^2 + 3}{y^2} \Big|_{(-1, 1)} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2 + 3}{1^2} = 1 + 4 = 5,$$

(3 pont)

Így a P -beli érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} z &= (2)(x + 1) + (5)(y - 1) - 4 \\ -2x - 5y + z &= -7. \end{aligned}$$

(2 pont)