A2 2. zárthelyi (A) - MEGOLDÁSOK 2024. április 30.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizze a számolást!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. Gauss-Jordan módszerrel az inverz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 7 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & -1/2 \end{array}\right)$$

VAGY adjungált segítségével

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{4(-3+4)+2(2-3)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -6 & 20 & 12 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -6 & 20 & -2 \\ -4 & 12 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1/2 \\ -3 & 10 & -1 \\ -2 & 6 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1/2 \\ -3 & 10 & -1 \\ -2 & 6 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait Gauss-elimináció segítségével!

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z \quad\quad &= 1 \\ x - y \quad\quad + w &= 0 \\ 2x - y - z + w &= 2 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{s_3-2s_2}{\overset{s_2-s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{s_3-3s_2}{\sim}$$

$$\overset{s_3-3s_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 3 (3 db lépcső) így létezik megoldás. A változók száma 4 így végtelen sok megoldásunk van, egy változó szabadon választható.

Lentről felfelé behelyettesítve az egyenletekbe $3z-2w=3$, azaz $z=1+\frac{2}{3}w$. Ezt felhasználva $y-4z+w=-1$, tehát $y=-1+4z-w=-1+4+\frac{8}{3}w-w=3+\frac{5}{3}w$. Végül az első sor alapján $x-2y+4z=1$, ezért $x=1+2y-4z=1+6+\frac{10}{3}w-4-\frac{8}{3}w=3+\frac{2}{3}w$.

Tehát $w\in\mathbb{R}$-t szabadon választva $x=3+\dfrac{2}{3}w$, $y=3+\dfrac{5}{3}w$ és $z=1+\dfrac{2}{3}w$.

3. Határozza meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszer megoldásában a "x" változó értékét!

$$\begin{aligned} 2x+y+2z&=-1 \\ 4x-3y-z&=4 \\ -2x-y-z&=2 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás. Az együtthatómátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(3-1)-1(-4-2)+2(-4-6)=-10$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-10}=\frac{(-1)(3-1)-1(-4+2)+2(-4+6)}{-10}=\frac{4}{-10}=-\frac{2}{5}=-0,4.$$

4. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és az egyik sajátértékhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+2(0-2(2-\lambda))=$$

$$-\lambda^3+7\lambda^2-14\lambda+8+4\lambda-8=-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda=-\lambda(\lambda^2-7\lambda+10)=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-5).$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 5$.

A sajátvektorok $\lambda_1 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{llll} 4x & & +2z & = 0 \\ -x & +2y & & = 0 \\ 2x & & +z & = 0 \end{array} .$$

Így $y = \frac{1}{2}x$, és $z = -2x$, tehát a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY
A sajátvektorok $\lambda_2 = 2$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{lll} 2x & +2z & = 0 \\ -x & & = 0 \\ 2x & -z & = 0 \end{array} .$$

Tehát $x = 0$, és $z = 2x = 0$, és y szabadon választható. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY
A sajátvektorok $\lambda_1 = 5$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{llll} -x & & +2z & = 0 \\ -x & -3y & & = 0 \\ 2x & & -4z & = 0 \end{array} .$$

Tehát $z = \frac{1}{2}x$, és $y = -\frac{1}{3}x$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{3}x \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$