A2 2. zárthelyi (B) - MEGOLDÁSOK 2024. április 30.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizze a számolást!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. Gauss-Jordan módszerrel az inverz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

VAGY adjungált segítségével

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(0-6) - 4(-4+3) + 2(2-0)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 20 & -2 & -6 \\ 12 & -1 & -4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 20 & 12 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 6 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 10 & 6 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait Gauss-elimináció segítségével!

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z + w &= -1 \\ 4x - y \qquad - 3w &= 4 \\ -2x - y + z - w &= 2 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{s_3+s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{s_2\leftrightarrow s_3}{\sim}$$

$$\overset{s_2\leftrightarrow s_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -5 & 6 \end{array}\right) \overset{s_3+5s_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 11 \end{array}\right)$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 3 (3 db lépcső) így létezik megoldás. A változók száma 4 így végtelen sok megoldásunk van, egy változó szabadon választható.

Lentről felfelé behelyettesítve az egyenletekbe $2z - 5w = 11$, tehát $z = \frac{11}{2} + \frac{5}{2}w$. A második sorból $y = 1$. Végül az első sor alapján $2x+2y-z+w = -1$, ezért $2x = -1-2y+z-w = -1-2+\frac{11}{2}+\frac{5}{2}w-w = \frac{5}{2}+\frac{3}{2}w$, azaz $x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}w$.

Tehát $w \in \mathbb{R}$-t szabadon választva $x = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}w$, $y = 1$ és $z = \frac{11}{2} + \frac{5}{2}w$.

3. Határozza meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszer megoldásában a "z" változó értékét!

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 2z &= 1 \\ x \qquad - z &= 0 \\ 2x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás. Az együtthatómátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-4-2) - (-1)(-3-8) = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{(-1)(8+1)}{-5} = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5} = 1,8.$$

4. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és az egyik sajátértékhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)(1-\lambda)-4) =$$

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8 + 4\lambda - 8 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 10\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-5).$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 5$.

A sajátvektorok $\lambda_1 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 4x & -y & +2z & = 0 \\ & 2y & & = 0 \\ 2x & & +z & = 0 \end{array}.$$

Így $y = 0$, és $x = -\frac{1}{2}z$. Az első egyenlet így $4x - y + 2z = -2z + 0 + 2z = 0$ teljesül, tehát a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY

A sajátvektorok $\lambda_2 = 2$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} 2x & -y & +2z & = 0 \\ & 0 & & = 0 \\ 2x & & -z & = 0 \end{array}.$$

Tehát $z = 2x = 0$, és $y = 2x + 4x = 6x$, ahol x szabadon választható. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 6x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

VAGY

A sajátvektorok $\lambda_1 = 5$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} -x & -y & +2z & = 0 \\ & -3y & & = 0 \\ 2x & & -4z & = 0 \end{array}.$$

Tehát $y = 0$, és $x = 2z$. Az első egyenlet így $-2z - 0 + 2z = 0$ teljesül. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$