

A2 MINTA(A) 2. zárthelyi – Megoldások

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszer megoldásában az y változó értékét!

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 1 \\2x - 2y + z &= -1 \\-x + 3y + z &= 1\end{aligned}\quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. Az együtthatómátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

nem nulla, tehát a szabály alkalmazható:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-6}{-15} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait Gauss-elimináció segítségével!

$$\begin{aligned}4x + y - 3z - u &= 6 \\x + y &+ 2u = 2 \\2x - y - 3z + u &= 2\end{aligned}\quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} s_2 - 4s_1 \\ s_3 - 2s_1 \end{array}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -9 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \\&\xrightarrow{\begin{array}{l} s_2 - 4s_1 \\ s_3 - 2s_1 \end{array}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{s_3 - s_2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)\end{aligned}$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 3 (3 db lépcső), így létezik megoldás. A változók száma 4, ezért végtelen sok megoldásunk van, egy változó szabadon választható.

Lentről felfelé behelyettesítve az egyenletekbe $6u = 0$, azaz $u = 0$. Ezt felhasználva $-3y - 3z - 9 \cdot 0 = -2$, tehát $y = \frac{2}{3} - z$. Végül az első sor alapján $x + y + 2 \cdot 0 = 2$, ezért $x = 2 - y = 2 - \frac{2}{3} + z = \frac{4}{3} + z$. Tehát $z \in \mathbb{R}$ -t szabadon választva $x = \frac{4}{3} + z$, $y = \frac{2}{3} - z$ és $u = 0$.

3. Határozza meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Adjon meg a sajátvektorokból álló bázist, és diagonalizálja a mátrixot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (5 \text{ pont})$$

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5),$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 5$.

A $\lambda_1 = 0$ a sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $x = -2y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \neq 0.$$

$\lambda_2 = 5$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $2x = y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Független sajátvektorok például az $\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ezek a vektorok merőlegesek, bázist alkotnak. Ennek a bázisnak a bázisváltó mátrixa $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{A mátrix inverze } \mathbf{B}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Így a diagonalizáció:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Számítsa ki az $f(x, y) = xe^y - \frac{5x^2}{y+2}$ kétfváltozós függvény gradiensét a $P(1, 0)$ pontban, majd írja fel itt az érintősík egyenletét!

(5 pont)

Megoldás.

$$f'_x(x, y) = e^y - \frac{10x}{y+2}, \text{ ami a } P \text{ pontban } f'_x(1, 0) = 1 \cdot e^0 - \frac{10}{2} = -4$$

$$f'_y(x, y) = xe^y + \frac{5x^2}{(y+2)^2}, \text{ ami a } P \text{ pontban } f'_y(1, 0) = 1 \cdot e^0 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$f(1, 0) = 1 \cdot e^0 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

Így a P -beli érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} z &= (-4)(x-1) + (2,25)(y-0) - 1,5 \\ -4x + 2,25y - z &= -2,5. \end{aligned}$$