

A2 MINTA(B) 2. zárthelyi – Megoldások

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg az egyenletrendszert az együtthatómátrix invertálásával!

$$\begin{aligned}x + 3y - z &= 3 \\2x + 2y - z &= -4 \\-x - z &= 2\end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás. Adjungált segítségével az inverz:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{-1 \cdot (-3 + 2) - 1(2 - 6)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 2/5 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}. \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} -2/5 & 3/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \\ 2/5 & -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/5 \\ 15/5 \\ 10/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldását az "a" paraméter függvényében!

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 0 \\x - az &= 0 \\x - y + 2z &= 0\end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\mathbf{s}_2 \leftrightarrow \mathbf{s}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -a-1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}\mathbf{s}_2} \\&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & -a-1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{s}_3 + 2\mathbf{s}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -a-\frac{5}{3} & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

Ha $-a - \frac{5}{3} \neq 0$, azaz $a \neq -\frac{5}{3}$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3 = \text{változók száma}$, ekkor egy darab egyértelmű megoldás létezik, amely az $x = y = z = 0$ triviális megoldás, mivel az egyenletrendszer homogén.

Ha $a = -\frac{5}{3}$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < \text{változók száma}$, ekkor végtelen sok megoldás létezik. A megoldások kielégítik az

$$y - \frac{1}{3}z = 0, \text{ azaz } y = \frac{1}{3}z,$$

és

$$x + 2y + z = 0, \text{ azaz } x = -2y - z = -\frac{2}{3}z - z = -\frac{5}{3}z$$

egyenleteket, így

$$z \in \mathbb{R}, \quad y = \frac{1}{3}z, \quad x = -\frac{5}{3}z$$

számhármassok alkotják az egyenletrendszer megoldását.

3. Határozza meg az alábbi mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda) \left((-1-\lambda)(5-\lambda) + 4 \right) + \left(2 - (-1)(-1-\lambda) \right) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda - 4), \end{aligned}$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 4$. Tehát a legnagyobb sajátérték a 4.

A sajátvektorok $\lambda_3 = 4$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rrr} -3x & & +z = 0 \\ -2x & -5y & +4z = 0 \\ -x & -y & +z = 0 \end{array}.$$

Az első egyenletből $z = 3x$, ezért a második egyenletből $-2x - 5y + 12x = 0$, tehát $5y = 10x$, azaz $y = 2x$. Ekkor a harmadik egyenlet $-x - (2x) + 3x = 0$ mindig teljesül. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. Számítsa ki az $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{xy}$ kétváltozós függvény gradiensét a $P(1, 2)$ pontban, majd állapítsa meg itt a $\mathbf{v} = (3, 4)$ irányban vett iránymenti deriváltat is!

(5 pont)

Megoldás. Kiszámoljuk a parciális deriváltakat, ha $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{xy} = \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}$:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{2x}{y} + \frac{y^2}{x^2} & f'_x(1, 2) &= 1 + 4 = 5 \\ f'_y(x, y) &= -\frac{x^2}{y^2} - \frac{2y}{x} & f'_y(1, 2) &= -\frac{1}{4} - 4 = -\frac{17}{4} \end{aligned}$$

Így a függvény gradiense a P -ben: $f(P) = \left(5, -\frac{17}{4}\right)$. A $\mathbf{v}$ vektor iránya:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(3, 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \langle f(P), \mathbf{e} \rangle = \left\langle \left(5, -\frac{17}{4}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle = 3 - \frac{17}{5} = -\frac{2}{5}.$$