A2 MINTA(A) 2. zárthelyi – Megoldások

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy számvitel szakos hallgatóinak

1. A p valós paraméter függvényében számolja ki az alábbi mátrix determinánsát. A paraméter mely értékére lesz a mátrix szinguláris?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & p \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A determináns értéke

$$1(5-3p)+1(0-2p)+2(0-10)=-15-5p.$$

A mátrix szinguláris, ha determinánsa nulla. Így $p=-3$ esetén lesz a determináns értéke nulla.

2. Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait Gauss-elimináció segítségével!

$$\begin{aligned} 4x+y-3z-u&=6 \\ x+y+2u&=2 \\ 2x-y-3z+u&=2 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 1 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{s_2 \leftrightarrow s_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-4s_1}{\sim}}$$

$$\underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-4s_1}{\sim}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -9 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \overset{s_3-s_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 3 (3 db lépcső) így létezik megoldás. A változók száma 4 így végtelen sok megoldásunk van, egy változó szabadon választható.

Lentről felfelé behelyettesítve az egyenletekbe $6u=0$, azaz $u=0$. Ezt felhasználva $-3y-3z-9\cdot 0=-2$, tehát $y=\dfrac{2}{3}-z$. Végül az első sor alapján $x+y+2\cdot 0=2$, ezért $x=2-y=2-\frac{2}{3}+z=\dfrac{4}{3}+z$. Tehát $z\in\mathbb{R}$-t szabadon választva $x=\dfrac{4}{3}+z$, $y=\dfrac{2}{3}-z$ és $u=0$.

3. Határozza meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszer megoldásában az y változó értékét!

$$\begin{aligned} x+2y-z&=1 \\ 2x-2y+z&=-1 \\ -x+3y+z&=1 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás. Cramer-szabállyal abban az esetben tudunk megoldani egy lineáris egyenletrendszert, ha az ismeretlenek és az egyenletek száma megegyezik, és az együttható mátrix determinánsa nem 0 (azaz egy darab egyértelmű megoldás van). Az együtthatómátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-6}{-15} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

4. Határozzuk meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Adjunk meg a sajátvektorokból álló bázist. Diagonalizáljuk a mátrixot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5),$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 5$.

A $\lambda_1 = 0$ a sajátvektorok:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $x = -2y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, \quad y \neq 0.$$

$\lambda_2 = 5$ esetén a következő:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $2x = y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, \quad x \neq 0.$$

Független sajátvektorok például az $\mathbf{s_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{s_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ezek a vektorok merőlegesek, bázist alkotnak. Ennek a bázisnak a bázisváltó mátrixa $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A mátrix inverze $\mathbf{B^{-1}} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.

Így a diagonalizáció:

$$\mathbf{B^{-1}AB} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$