A2 MINTA(B) 2. zárthelyi – Megoldások

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi mátrix inverzét! Ellenőrizze a számolást!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. Gauss-Jordan módszerrel az inverz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 4/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 4/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 4/3 \end{array}\right)$$

VAGY adjungált segítségével

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{-1\cdot(-3+2)+1(2-6)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Határozza meg az alábbi mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(5 pont)

Megoldás. Sor- és oszloptranszformációkkal alakíthatjuk a mátrixok például így:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{s}_1 \leftrightarrow \mathbf{s}_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{s}_4+3\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2+2\mathbf{s}_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 12 & 3 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{s}_4-\mathbf{s}_2}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{s}_4-\mathbf{s}_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az utolsó mátrixban három "lépcső" szerepel, így a mátrix rangja 3.

3. Határozza meg az egyenletrendszer megoldását az "a" paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x - az &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_2 \leftrightarrow \mathbf{s}_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \end{array}\right) \underset{\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_1}{\overset{\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -a-1 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{3}\mathbf{s}_2}{\sim}$$

$$\overset{-\frac{1}{3}\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & -a-1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{s}_3+2\mathbf{s}_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -a-\frac{5}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Ha $-a - \frac{5}{3} \neq 0$, azaz $a \neq -\dfrac{5}{3}$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ =változók száma, ekkor egy darab egyértelmű megoldás létezik, amely az $x = y = z = 0$ triviális megoldás, mivel az egyenletrendszer homogén.

Ha $a = -\dfrac{5}{3}$, akkor $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ <változók száma, ekkor végtelen sok megoldás létezik. A megoldások kielégítik az

$$y - \frac{1}{3}z = 0, \text{ azaz } y = \frac{1}{3}z,$$

és

$$x + 2y + z = 0, \text{ azaz } x = -2y - z = -\frac{2}{3}z - z = -\frac{5}{3}z$$

egyenleteket, így

$$z \in \mathbb{R}, \quad y = \frac{1}{3}z, \quad x = -\frac{5}{3}z$$

számhármasok alkotják az egyenletrendszer megoldását.

4. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(5 pont)

Megoldás. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2-\lambda & -3 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\Big((2-\lambda)(-3-\lambda)+6\Big) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)\lambda.$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 1$.

A sajátvektorok $\lambda_1 = -1$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rrrl} 2x & & & = 0 \\ -4x & +3y & -3z & = 0 \\ 4x & +2y & -2z & = 0 \end{array}.$$

Így $x = 0$, és $y - z = 0$, tehát a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_2 = 0$ esetén:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rrrl} x & & & = 0 \\ -4x & +2y & -3z & = 0 \\ 4x & +2y & -3z & = 0 \end{array}.$$

Tehát $x = 0$, és $2y - 3z = 0$, $\quad y = \frac{3}{2}z$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok $\lambda_1 = 1$ esetén a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rrrl} & & 0 & = 0 \\ -4x & +y & -3z & = 0 \\ 4x & +2y & -4z & = 0 \end{array}.$$

Tehát a két egyenlet összegéből $3y - 7z = 0$, azaz $z = \frac{3}{7}y$, és $4x + 2y - \frac{12}{7}y = 0$, azaz $x = -\frac{1}{14}y$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{14}y \\ y \\ \frac{3}{7}y \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$