

## A2 1.pótzárthelyi - MEGOLDÁSOK

2025. május 12.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

$$\int_{3/2}^3 \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx$$

**Megoldás.**

Mivel függvény  $x = \frac{3}{2}$ -ben nem korlátos, így ott közelítjük:

$$\int_{3/2}^3 \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{3/2+\varepsilon}^3 (2x-3)^{-1/2} dx =$$

( 1 pont )

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \int_{3/2+\varepsilon}^3 (2x-3)^{-1/2} \cdot 2 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[ \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^{1/2}}{1/2} \right]_{3/2+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\sqrt{2x-3}]_{3/2+\varepsilon}^3 =$$

( 3 pont )

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \sqrt{3} - \sqrt{2\varepsilon} = \sqrt{3}.$$

( 1 pont )

Az integrál konvergens, határértéke  $\sqrt{3}$ .

2. Keresse meg a  $z^4 - 4z^2 - 5$  polinom gyökeit a komplex számok körében, és írja fel gyöktényezős alakban!

**Megoldás.** Ennek a bújtatott másodfokú egyenletnek,  $a^2 - 4a - 5 = 0$  két valós(egész) gyöke van, mivel  $a^2 - 4a - 5 = (a - 5)(a + 1)$ , így az  $a = 5$  és  $a = -1$  számok a megoldásai. ( 2 pont )

Ebből

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{5}, \quad \text{és} \quad z_{3,4} = \sqrt{-1} = \pm i$$

( 2 pont )

lesznek, így a polinom szorzatalakja

$$(z - \sqrt{5})(z + \sqrt{5})(z - i)(z + i).$$

( 1 pont )

3. Írjuk fel a  $P(1, 4, 0)$  ponton átmenő  $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$  normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a  $Q(-3, 2, 3)$  pontnak ettől a síktól vett távolságát.

**Megoldás.** A sík egyenlete

$$2(x - 1) - 2(y - 4) + (z - 0) = 0, \text{ azaz}$$

$$2x - 2y + z = -6.$$

( 2 pont )

A  $Q$  pont erre nem illeszkedik, mivel  $2 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 + 3 = -6 - 4 + 3 = -7$ . Így a pont távolsága a Hesse-féle normálalak segítségével számolva

$$d(Q, s) = \left| \frac{2 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 + 3 + 6}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-1}{\sqrt{9}} \right| = \frac{1}{3}.$$

( 3 pont )

4. Számítsuk ki az adjungált mátrix segítségével az alábbi mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

**Megoldás.**

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(-1) \cdot (-6 - 2) - (-2)(-2 - 3)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

( 3 pont )

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 8 & -6 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1/2 & -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

( 2 pont )

## A2 2.pótzárthelyi - MEGOLDÁSOK

2025. május 12.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozza meg az összes olyan  $\mathbf{x}$  vektort, amelyre teljesül, hogy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$ , ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Megoldás.** Az egyenletet átrendezve

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} + \mathbf{x} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ha az  $\mathbf{A} - \mathbf{E}$  mátrix invertálható. (Itt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , például  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .)

( 1 pont )

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 1 \cdot (-8 - 6) - 2(2 - 8) = -14 + 12 = -2,$$

tehát a mátrix invertálható. Az adjungált segítségével az inverz

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -14 & -8 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -14 & 4 & 8 \\ -8 & 2 & 5 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -2,5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Így az ismeretlen vektor:

( 3 pont )

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -2,5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ -12 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

( 1 pont )

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-eliminációval.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & 2z & - & 2u & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & 3u & = & 0 \\ -2x & & & & - & 3z & - & u & = & 0 \end{array}$$

**Megoldás.**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{s}_3 + 2\mathbf{s}_1]{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

( 2 pont )

Tehát  $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 < \text{változók száma } (n = 4)$ , ekkor végtelen sok megoldás létezik (melyek közül egy a  $x = y = z = u = 0$  triviális megoldás, mivel az egyenletrendszer homogén). Két változó szabadon választható:

$$\text{ha } z, u \in \mathbb{R}, \quad \text{akkor } -2y = z - 5u, \text{ azaz } y = -\frac{1}{2}z + \frac{5}{2}u,$$

$$\text{továbbá } x = -y - 2z + 2u = \frac{1}{2}z - \frac{5}{2}u - 2z + 2u = -\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}u$$

az egyenletrendszer megoldásai.

( 3 pont )

3. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

**Megoldás.** A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9.$$

Ennek gyökei  $\lambda_1 = -3$  és  $\lambda_2 = 3$ .

( 2 pont )

A sajátvektorok  $\lambda_1 = -3$  esetén:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x + 2y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{matrix} \Rightarrow y = -2x, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A sajátvektorok  $\lambda_2 = 3$  esetén:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x + 2y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{matrix} \Rightarrow y = x, \text{ tehát: } \mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

( 3 pont )

4. Számítsa ki az  $f(x, y) = (x^2 + e^x)(x + y^2)$  kétfváltozós függvény gradiensét a  $P(0, 2)$  pontban, majd írja fel itt az érintősík egyenletét!

**Megoldás.**  $f(0, 2) = (0^2 + 1)(0 + 2^2) = 4$

$$f(x, y) = (x^2 + e^x)(x + y^2) = x^3 + xe^x + x^2y^2 + e^xy^2$$

$$f'_x(0, 2) = 3x^2 + e^x + xe^x + 2xy^2 + e^xy^2 \Big|_{(0,2)} = 0 + 1 + 0 + 0 + 1 \cdot 2^2 = 5,$$

$$f'_y(0, 2) = 2x^2y + 2e^xy \Big|_{(0,2)} = 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4,$$

( 3 pont )

Így a  $P$ -beli érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} z &= 5(x - 0) + 4(y - 2) + 4 \\ 5x + 4y - z &= 4. \end{aligned}$$

( 2 pont )