

1.) Keressük meg az összes valós gyökét az alábbi polinomnak!

$$p(x) = 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x$$

(7 pont)

**Megoldás - 1.)**

A polinomból kiemelve  $2x$ -et  $p(x) = 2x(x^3 + x^2 - 4x + 2)$ , tehát  $x_1 = 0$  gyöke a polinomnak. (1 pont)

Ekkor a köbös polinom egész gyökei lehetnek:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ .  $x = 1$ -et behelyettesítve  $1^3 + 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 0$ . Tehát az  $x - 1$  is kiemelhető a polinomból,  $x_2 = 1$  is gyöke a polinomnak. (2 pont)

Polinomosztással

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 4x + 2 : x - 1 = x^2 + 2x - 2 \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 2} \\ 2x^2 - 4x + 2 \\ \underline{2x^2 - 2x} \phantom{+ 2} \\ - 2x + 2 \\ \underline{- 2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

(2 pont)

Az  $x^2 + 2x - 2$  polinom további gyökei

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

(2 pont)

2.) Számolja ki az alábbi sorozatok határértékét!

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n - 2^n}$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n+1}$

(4+3 pont)

**Megoldás - 2.)**

a) A rendőr elv alapján

$$\begin{array}{ccc} 3 \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \sqrt[n]{3^n - \frac{3^n}{2}} < \sqrt[n]{3^n - 2^n} < \sqrt[n]{3^n} = 3 \\ \begin{array}{c} n \uparrow \infty \\ \downarrow \\ 3 \end{array} & & \begin{array}{c} n \uparrow \infty \\ \downarrow \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} n \uparrow \infty \\ \downarrow \\ 3 \end{array} \end{array}$$

(2+2 pont)

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right)^{\frac{3n+1}{n}} = (e^{-2})^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n}} = e^{-6}.$

(2+1 pont)

3.) Írja fel az  $f(x) = \arctg(2x)$  függvény  $x_0 = 1/2$  pontbeli érintőjét! (6 pont)

**Megoldás - 3.)**

A függvényérték  $\arctg\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ . (1 pont)

$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ . (2+1 pont)

Az érintő egyenlete  $y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ . (2 pont)

4.) Végezze el az  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$  függvény teljes függvényvizsgálatát! (10 pont)

**Megoldás - 4.)**

•  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . (1 pont)

• nincs spec.tul.

• zh.:  $\{0, 2\}$  (1 pont)

•  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{-1}{0 \pm} = \mp \infty$ , pólus,  $x = 1$  függ.asz.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 2x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$ ,

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 - 2x}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-x}{x-1} = -1$ ,

ferde aszimptóta  $y = x - 1$  a  $\pm \infty$ -ben

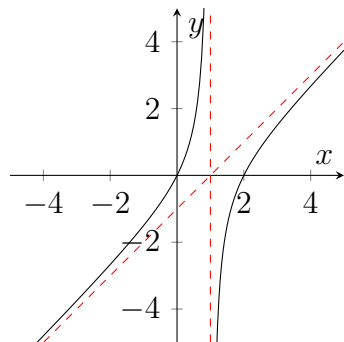
(3 pont)

•  $f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x}{(x-1)^2} =$

$= \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} > 0$ ,  $(-\infty, 1)$  és  $(1, \infty)$  intervallumokon is monoton növény. (2 pont)

•  $f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}\right)' = -\frac{2}{(x-1)^3}$ , azaz  $(-\infty, 1)$ -on konvex, a  $(1, \infty)$ -on konkáv.

(2 pont)



•

•  $R_f = \mathbb{R}$  (1 pont)

5.) Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$a) \int x e^{-x} dx \quad b) \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

(4+4 pont)

**Megoldás - 5.)**

$$a) \int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c \quad (4 \text{ pont})$$

$$b) \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (4 \text{ pont})$$

6.) Számítsa ki az  $f(x) = e^{-x} + 1$  függvény  $x \in [0, 1]$  darabjának x-tengely körüli megforgatásával létrejött forgástest térfogatát! (7 pont)

**Megoldás - 6.)**

$$V = \int_0^1 \pi(e^{-x} + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{-2x} + 2e^{-x} + 1 dx = \quad (3 \text{ pont})$$

$$= \pi \left[ \frac{e^{-2x}}{-2} - 2e^{-x} + x \right]_0^1 =$$

(2 pont)

$$= \pi \left( \left( \frac{-1}{2e^2} - \frac{2}{e} + 1 \right) - \left( \frac{-1}{2} - 2 + 0 \right) \right) = \pi \left( \frac{-1}{2e^2} - \frac{2}{e} + \frac{7}{2} \right)$$

(2 pont)