10. gyakorlat megoldásai
Többváltozós függvények deriválása

F1. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait.

(a) $f(x,y) = x^3 - 5x^2y - xy + 3y^6 - 1$,

(b) $f(x,y) = e^{x^2+y^3}$,

(c) $f(x,y,z) = xe^{-y}\mathrm{tg}(z)$.

M1. (a) $f'_x(x,y) = 3x^2 - 5\cdot 2xy - y = 3x^2 - 10xy - y$

$f'_y(x,y) = -5x^2 - x + 3\cdot 6y^5 = -5x^2 - x + 18y^5$

(b) $f'_x(x,y) = e^{x^2+y^3}\cdot 2x$

$f'_y(x,y) = e^{x^2+y^3}\cdot 3y^2$

(c) $f'_x(x,y,z) = e^{-y}\mathrm{tg}(z)$

$f'_y(x,y,z) = -xe^{-y}\mathrm{tg}(z)$

$f'_z(x,y,z) = xe^{-y}\dfrac{1}{\cos^2(z)}$

F2. Írjuk fel az adott pontban az alábbi felületek érintősíkját.

(a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2; \quad P(1,-2)$,

(b) $f(x,y) = x\ln(x+y); \quad P(-2,3)$.

M2. Egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény (x_0,y_0)-beli érintősíkjának egyenlete:

$$z = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0).$$

(a) $f'_x(x,y) = 2x+3y$, ami a P pontban $f'_x(1,-2) = 2-6 = -4$

$f'_y(x,y) = 3x+2y$, ami a P pontban $f'_y(1,-2) = 3-4 = -1$

$f(1,-2) = 1-6+4 = -1$

Így a P-beli érintősík egyenlete:

$$z = (-4)(x-1) + (-1)(y+2) - 1$$
$$4x + y + z = 1$$

(b) $f'_x(x,y) = \ln(x+y) + x\dfrac{1}{x+y}$, ami a P pontban $f'_x(-2,3) = 0 + (-2)\cdot 1 = -2$

$f'_y(x,y) = x\dfrac{1}{x+y}$, ami a P pontban $f'_y(-2,3) = (-2)\cdot 1 = -2$

$f(-2,3) = -2\cdot 0 = 0$

Így a P-beli érintősík egyenlete:

$$z = (-2)(x+2) + (-2)(y-3) + 0$$
$$2x + 2y + z = 2$$

F3. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott pontban.

(a) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15 \quad P(3,2); \quad \mathbf{v} = (2,-4)$

(b) $f(x,y) = \mathrm{tg}(2x+y) \quad P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \quad \alpha = 225^\circ$

M3. (a) Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = 4x - 3y$$
$$f'_y(x,y) = -3x + 2y$$

Ezek értéke a $P(3,2)$ pontban: $f'_x(3,2) = 12-6 = 6$ és $f'_y(3,2) = -9+4 = -5$. Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathrm{grad} f(P) = (6,-5)$. A $\mathbf{v}$ vektor iránya:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \langle \mathrm{grad} f(P), \mathbf{e} \rangle = \left\langle (6,-5), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

(b) Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)} \cdot 2$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)}$$

Ezek értéke a P pontban: $f'_x(P) = 8$ és $f'_y(P) = 4$, mivel $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathrm{grad} f(P) = (8,4)$. Ebben az esetben vektor helyett szöggel adjuk meg az irányt. Ez azt jelenti, hogy az irányvektor ezt a szöget zárja be az x tengellyel, azaz az irányvektor:

$$\mathbf{e} = (\cos 225^\circ, \sin 225^\circ) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke ebben az esetben is a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \langle \mathrm{grad} f(P), \mathbf{e} \rangle = \left\langle (8,4), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = -\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$$

F4. Az $f(x,y)=\dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

M4. A vízcsepp nyilván arra fog elindulni, amerre a leginkább lejt a felület, azaz amerre a legkisebb az iránymenti derivált, azaz a gradienssel ellentétes irányba. Számoljuk ki a gradienst! A parciális deriváltak kiszámításához a függvényt $f(x,y)=y^3e^{-2x-1}$ alakba írjuk.

$$f'_x(x,y)=y^3e^{-2x-1}(-2)$$
$$f'_y(x,y)=3y^2e^{-2x-1}$$

A $P=\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ pontban az értékük: $f'_x(P)=-2$, illetve $f'_y(P)=3$. Így $\operatorname{grad} f(P)=(-2,3)$, a csepp az ezzel ellentétes irányba, azaz a $(2,-3)$ irányba fog elindulni. A maximális meredekség a gradiens irányában van, értéke a gradiens vektor hossza, ami

$$|(-2,3)|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}.$$

F5. Írjuk fel az $f(x,y,z)=(x+2yz,\sqrt{x}+\ln z)$ függvény $(4,3,1)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.

M5. Az f függvény komponensfüggvényei:

$$f_1(x,y,z)=x+2yz$$
$$f_2(x,y,z)=\sqrt{x}+\ln z$$

A Jacobi-mátrix ezen függvények parciális deriváltjaiból áll: a sorokban a megfelelő komponens függvények parciális deriváltjai, míg az oszlopokban a megfelelő változó szerinti parciális deriváltak vannak. Például a Jacobi-mátrix első sorának második eleme az első komponensfüggvény második változó szerinti parciális deriváltja, azaz $f'_{1y}(x,y,z)=2z$. Így a Jacobi-mátrix a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2z & 2y \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

Ez a $(4,3,1)$ pontban a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \dfrac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

F6. Legyen $f(x, y) = 3x^2 y$, és $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \ln t$. Határozzuk meg az $f(x(t), y(t))$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

M6. Az f függvény Jacobi-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 \end{bmatrix}$$

Míg a $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin(t), \ln(t))$ függvény (nevezzük $g(t)$-nek) Jacobi-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

Az $f \circ g$ összetett függvény deriváltja a láncszabály szerint

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t),$$

ahol a $\cdot$ mátrixszorzást jelent. Ez az esetünkben:

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \begin{bmatrix} 6\sin(t)\ln(t) & 3\sin^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix} =$$

$$= 6\sin(t)\ln(t)\cos(t) + \frac{3\sin^2(t)}{t}$$

Gyakorló feladatok végeredményei

M8. $f'_x(x, y) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{y^2 + x^2}$

$f'_y(x, y) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{y^2 + x^2}$

M9. $z = \dfrac{1}{2}(x - 3) - (y - 1) + 1$

M10. minimum: $-\sqrt{5}$, maximum: $\sqrt{5}$