

## 12. gyakorlat megoldásai

### Kettős integrálok

**F1.** Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények integrálját a megadott tartományon.

(a)  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ;  $0 \leq y \leq 3$

(b)  $f(x, y) = xe^y$ ,  $y = x^2$  és  $y = x + 2$  között

(c)  $f(x, y) = xy$ ,  $y = x$ ,  $y = 3 - x$  és az  $x$ -tengely közötti háromszögön

**M1.** (a)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 2x^2 + 3xy + 4y^2 \, dy \, dx &= \int_1^2 \left[ 2x^2 y + 3x \frac{y^2}{2} + 4 \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^3 \, dx = \\ &= \int_1^2 6x^2 + \frac{27}{2}x + 36 \, dx = \left[ 6 \frac{x^3}{3} + \frac{27}{2} \frac{x^2}{2} + 36x \right]_1^2 = \frac{281}{4} \end{aligned}$$

(b) Az  $y = x^2$  és az  $y = x + 2$  metszéspontjainak  $x$  koordinátáira  $x^2 = x + 2$ , amiből  $x_1 = -1$  és  $x_2 = 2$ . Az  $x$  változó e két határ között mozog, míg adott  $x$  esetén az  $y$  változó az  $x^2$  és  $x + 2$  között változik (ezen  $x$ -ekre  $x^2 \leq x + 2$ ):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} xe^y \, dy \, dx &= \int_{-1}^2 [xe^y]_{y=x^2}^{y=x+2} \, dx = \int_{-1}^2 xe^{x+2} - xe^{x^2} \, dx = \\ &= \left[ xe^{x+2} - e^{x+2} - \frac{e^{x^2}}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{e^4}{2} + \frac{5}{2}e \end{aligned}$$

(c) Kétféleképpen is számolhatunk. Az  $x$  változó 0 és 3 között vesz fel értékeket, és adott  $x$ -re az  $y$  változó 0 és  $x$ , illetve 0 és  $3 - x$  között változik attól függően, hogy  $x$  másfélnél kisebb vagy nagyobb. Ennek megfelelően kettőbontjuk az integrált, és külön vesszük az  $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$  és az  $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$  esetet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^x xy \, dy \, dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \int_0^{3-x} xy \, dy \, dx &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^x \, dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{3-x} \, dx = \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} x \frac{x^2}{2} \, dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 x \frac{(3-x)^2}{2} \, dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^3}{2} \, dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{9}{2}x - 3x^2 + \frac{x^3}{2} \, dx = \\ &= \left[ \frac{x^4}{8} \right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[ \frac{9}{2} \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{8} \right]_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{27}{16} \end{aligned}$$

A másik lehetőség, hogy először az  $x$  szerint integrálunk, azaz  $y$  befutja a  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  intervallumot, és egy adott  $y$ -ra az  $x$  változó  $y$ -tól  $(3 - y)$ -ig fut:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} \int_y^{3-y} xy \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{x^2}{2} y \right]_{x=y}^{3-y} dy = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{(3-y)^2}{2} y - \frac{y^2}{2} y \, dy = \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{9}{2} y - 3y^2 \, dy = \left[ \frac{9}{2} \frac{y^2}{2} - y^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{16} \end{aligned}$$

**F2.** Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat.

$$(a) \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} \, dy \, dx$$

$$(b) \int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy$$

**M2.** (a) Az integrálás sorrendjének megcserélésekor meg kell gondolni, hogy hogyan változnak az integrálási határok. Ehhez célszerű ábrázolni, hogy hol integrálunk pontosan (az integrálandó függvény ebben a lépésben nem érdekes). Azért cseréljük meg az integrálás sorrendjét, mert így sokkal egyszerűbben kiszámolható integrálokat kapunk.

$$\begin{aligned} \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4 + 1} \, dx \, dy = \int_0^2 \left[ \frac{1}{y^4 + 1} x \right]_{x=0}^{y^3} dy = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4 + 1} \, dy = \\ &= \left[ \frac{\ln(y^4 + 1)}{4} \right]_0^2 = \frac{\ln(17)}{4} \approx 0,708 \end{aligned}$$

(b) Hasonlóan az (a) feladathoz:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin(x^2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y \sin(x^2) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \sin(x^2) \right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} \sin(x^2) \, dx = \left[ -\frac{\cos(x^2)}{4} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos(1)}{4} \approx 0,115 \end{aligned}$$

**F3.** Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az alábbi integrálokat a megadott tartományon.

$$(a) \iint_A x^3 y \, d(x, y) \quad A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq y\}$$

$$(b) \iint_A x^2 + y^2 \, d(x, y) \quad A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, x \leq y\}$$

**M3.** Áttérünk polárkoordinátákra, azaz az  $x$  és az  $y$  koordináták helyett az origótól való távolságot ( $r$ ) és a helyvektor  $x$ -tengellyel bezárt szögét ( $\varphi$ ) használjuk (mint ahogy a komplex számok trigonometrikus alakjánál). Ekkor

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Meg kell gondolni, hogy az adott  $A$  tartományt hogyan jellemezhetjük a polárkoordináták segítségével (segít, ha lerajzoljuk az  $A$  tartományt). Ha az integrálásnál áttérünk a polárkoordinátákra, akkor az integrálban megjelenik egy  $r$  szorzó (áttérés Jacobi-determinánsa) is.

(a) Ebben az esetben  $0 \leq r \leq 2$  és  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , így az integrál:

$$\begin{aligned} \iint_A x^3 y \, d(x, y) &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi)^3 (r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^2 \left[ -r^5 \frac{\cos^4 \varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \, dr = \int_0^2 \frac{r^5}{4} \, dr = \left[ \frac{r^6}{24} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(b) Ebben az esetben  $1 \leq r \leq 3$  és  $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$ , így az integrál:

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 + y^2 \, d(x, y) &= \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} ((r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2) r \, d\varphi \, dr = \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} r^3 \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_1^3 [r^3 \varphi]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\pi} \, dr = \int_1^3 \frac{3\pi}{4} r^3 \, dr = \left[ \frac{3\pi}{4} \frac{r^4}{4} \right]_1^3 = 15\pi \end{aligned}$$

### Gyakorló feladatok végeredményei

**M4.** 2

**M5.**

**M6.**  $\frac{9}{4} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$