

## 13. gyakorlat

### Hármas integrálok

**F1.** Számítsuk ki az alábbi háromváltozós függvények integrálját a megadott térrészben:

(a)  $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ;  $0 \leq y \leq 1$ ;  $0 \leq z \leq 3$ ;

(b)  $f(x, y, z) = x - 2y + 4z$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  és  $x + y + z = 1$  síkok közötti rész.

**F2.** Alkalmass koordináták bevezetésével határozzuk meg a felületek által határolt, illetve az egyenlőtlenségek által meghatározott tartományok térfogatát:

(a)  $z = 4 + x + 2y$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ;

(b)  $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ;

(c)  $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ ;

(d)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ ;

(e)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 6 - x^2 - y^2$ .

#### Gyakorló feladatok

**F3.** Számítsuk ki az  $f(x, y, z) = 1$  függvény integrálját a  $0 \leq x \leq 2$ ;  $0 \leq y \leq 1$ ;  $0 \leq z \leq x^2 + y^2$  egyenlőtlenségek által meghatározott térrészben.

**F4.** Számítsuk ki a  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  és a  $z = x^2 + y^2$  felületek által határolt tartomány térfogatát.

**F5.** Számítsuk ki az  $\alpha$  félnyílásszögű egységsugarú gömbcikk térfogatát.