

13. gyakorlat megoldásai

Hármas integrálok

F1. Számítsuk ki az alábbi háromváltozós függvények integrálját a megadott térrészben:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y - z, \quad 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 3$

(b) $f(x, y, z) = x - 2y + 4z, \quad x = 0; y = 0; z = 0; \text{ és } x + y + z = 1$ síkok közötti rész

M1. (a)

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 x^2 + y - z \, dz \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_0^1 \left[x^2 z + yz - \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^3 \, dy \, dx = \\ &= \int_0^2 \int_0^1 3x^2 + 3y - \frac{9}{2} \, dy \, dx = \int_0^2 \left[3x^2 y + \frac{3}{2} y^2 - \frac{9}{2} y \right]_{y=0}^1 \, dx = \\ &= \int_0^2 3x^2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \, dx = \int_0^2 3x^2 - 3 \, dx = [x^3 - 3x]_{x=0}^2 = 8 - 6 = 2 \end{aligned}$$

(b) Az integrálási tartomány egy T tetraéder, melynek a csúcsai $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$. Ennek a vetülete az xy koordinátasíkra a $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsú háromszög. Ennek átfogójának egyenlete $x + y = 1$ avagy $y = 1 - x$. Az x változó így 0 és 1 között fut, míg adott x mellett az y 0 és $1 - x$ között. Adott (x, y) párra a z változó 0 és $1 - x - y$ között lehet. Így a kérdéses integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x - 2y + 4z \, dz \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} [xz - 2yz + 2z^2]_{z=0}^{1-x-y} \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y) - 2y(1-x-y) + 2(1-x-y)^2 \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2 - 3x - 6y + x^2 + 4y^2 + 5xy \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \left[2y - 3xy - 3y^2 + x^2 y + 4\frac{y^3}{3} + 5x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} \, dx = \\ &= \int_0^1 2(1-x) - 3x(1-x) - 3(1-x)^2 + x^2(1-x) + 4\frac{(1-x)^3}{3} + 5x\frac{(1-x)^2}{2} \, dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 \, dx = \left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha meggondoljuk, hogy a T tetraéder tömegközéppontja a $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, míg a tömege ($\varrho = 1$ esetén) $\frac{1}{6}$, így a nyomatékai $m_x = m_y = m_z = \frac{1}{24}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\iiint_T x \, d(x, y, z) = \iiint_T y \, d(x, y, z) = \iiint_T z \, d(x, y, z) = \frac{1}{24}.$$

Ebből a kérdéses integrál $\frac{1}{24} - \frac{2}{24} + \frac{4}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

F2. Alkalmas koordináták bevezetésével határozzuk meg a felületek által határolt, illetve az egyenlőtlenségek által meghatározott tartományok térfogatát:

- (a) $z = 4 + x + 2y, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$
- (b) $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- (c) $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4$
- (d) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$
- (e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 6 - x^2 - y^2$

M2. Ha egy V tartomány térfogatát szeretnénk kiszámolni, akkor a V tartományon kell integrálni az 1 függvényt.

Ha nem a derékszögű koordinátákat használjuk, akkor az egyik lehetőség az (r, φ, m) hengerkoordináták, melyekből a derékszögű koordináták:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = m$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke a hengerkoordináták esetén: r (ezzel még meg kell szorozni az integrálandó függvényt).

A másik lehetőség az (r, φ, θ) gömbi koordináták használata, melyekből a derékszögű koordináták:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke a gömbi koordináták esetén: $r^2 \sin \theta$.

(a) Itt hengerkoordinátákat használunk:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{4+r \cos \varphi + 2r \sin \varphi} 1 \, dm \, d\varphi \, dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 + r \cos \varphi + 2r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r + r^2 \cos \varphi + 2r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, dr = \int_0^1 [4r + r^2 \sin \varphi - 2r^2 \cos \varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = \\ &= \int_0^1 8r\pi \, dr = [4r^2\pi]_{r=0}^1 = 4\pi \end{aligned}$$

(b) A megadott feltétel elvivalens azzal, hogy $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és $0 \leq z$. Ez egy 2 sugarú (felső) félgömb, azaz a gömbi koordinátákat használjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} [-r^2 \cos \theta]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^2 2\pi r^2 \, dr = \left[2\pi \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^2 = \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

(c) A második feltétel sugallja, hogy itt a hengerkoordinátákat kell használni:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r 1r \, dm \, d\varphi \, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^2 2\pi r^2 \, dr = \left[2\pi \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^2 = \frac{16\pi}{3}$$

(d) Az első feltétel mutatja, hogy egy gömbön belül vagyunk, így a gömbi koordinátákat használjuk:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} [-r^2 \cos \theta]_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) d\varphi \, dr = \int_0^1 2\pi r^2 \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \right) dr = \\ &= \int_0^1 r^2 \pi (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \, dr = \left[\frac{r^3}{3} \pi (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

(e) Itt is hengerkoordinátákat kell használni. Ekkor $x^2 + y^2 = r^2$, így a lehetséges legnagyobb r értékre $6 - r^2 = r$, amiből $r = 2$ (jelen esetben az $r = -3$ gyöknek nincs értelme).

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^{6-r^2} 1r \, dm \, d\varphi \, dr &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (6 - r^2 - r)r \, d\varphi \, dr = \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 6r - r^3 - r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^2 2\pi(6r - r^3 - r^2) \, dr = \\ &= 2\pi \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^2 = 2\pi \left(12 - 4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

Gyakorló feladatok végeredményei

M3. $\frac{10}{3}$

M4. 8π

M5. $\frac{2\pi}{3}(1 - \cos \alpha)$