

## 1. feladatsor megoldása

1. (a) A végtelenig való integrálást határértékként írjuk fel:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(1-x)^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b (1-x)^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{(1-x)^{-2}}{-2} \right]_3^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(1-b)^{-2}}{2} - \frac{(1-3)^{-2}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

- (b) Először az integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással. Mivel  $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ , így

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az  $A, B$  együtthatókat beszorzás után kapott egyenletrendszerből kapjuk:

$$\begin{aligned} 6 &= A(x+2) + B(x-1) \\ 6 &= (A+B)x + 2A - B, \end{aligned}$$

amiből  $A+B=0$ , és  $2A-B=6$ . Ebből  $A=2, B=-2$ , és így

$$\int \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2} dx = 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + C = 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \ln \left| \frac{b-1}{b+2} \right| - 2 \ln \left| \frac{2-1}{2+2} \right| = \\ &= -2 \ln \left( \frac{1}{4} \right) = 4 \ln 2 \approx 2,77, \end{aligned}$$

mert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b-1}{b+2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{b}}{1 + \frac{2}{b}} = 1.$$

- (c) Először az integrált számoljuk ki parciális integrálással:

$$\int x e^{-2x} dx = x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

Ezzel az improprius integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{b e^{-2b}}{2} - \frac{e^{-2b}}{4} - \left( -\frac{0 e^{-2 \cdot 0}}{2} - \frac{e^{-2 \cdot 0}}{4} \right) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0$$

a L'Hospital-szabály alkalmazásával.

2. (a) A függvény 1-ben „száll el”, így azt kell „óvatosan”, azaz határértékkal megközelíteni:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[ \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow 1^-} 3(b-1)^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot (0-1)^{\frac{1}{3}} = 3.$$

(b) Itt a  $-2$ -ben van „probléma”:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}} dx &= \lim_{a \rightarrow -2+} \int_a^0 6(4+2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow -2+} \left[ \frac{6(4+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} 6(4+2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} - 6(4+2a)^{\frac{1}{2}} = 12.\end{aligned}$$

(c) Először integrálunk, melyhez visszavezetjük arra, amit tudunk (majd lineáris helyettesítés):

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ezzel az improprius integrál (a függvény a  $2$ -ben tart a végtelenhez):

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 2-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 2-} \left[ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow 2-} \arcsin\left(\frac{b}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Deriválással kapjuk, hogy pozitív  $\lambda$  esetén  $f_\lambda$  konkáv. Továbbá igaz, hogy  $f_\lambda(0) = \lambda$ , és  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\lambda = 0$ . Ezek alapján ábrázolhatjuk a függvényeket még azt is felhasználva, hogy nagyobb  $\lambda$  esetén  $f_\lambda$  gyorsabban tart a  $0$ -hoz.

Az improprius integrál:

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-\lambda x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda \cdot 0}) = 1.$$

5. Végeredmények:

(a)  $\frac{1}{6} \approx 0,167$ ;

(b)  $\frac{e^{-10}}{5} \approx 9,08 \cdot 10^{-6}$ ;

(c)  $\frac{3}{2} = 1,5$ .