

## 2. gyakorlat megoldásai

### Vektorok és koordináta geometria

**F1.** Számítsuk ki az  $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$  és  $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$  vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét.

**M1.** A skaláris szorzatuk:  $\mathbf{ab} = 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$ .  
A hajlásszöget a skaláris szorzatból számolhatjuk:

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right) = \arccos \left( \frac{9}{\sqrt{26} \cdot 3} \right) \approx 54^\circ$$

**F2.** Bontsuk fel a  $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$  vektort az  $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$  vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

**M2.** A párhuzamos komponens az előadáson tanult formulával:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{av}}{\mathbf{aa}} \mathbf{a} = \frac{8}{10} (3; 1; 0) = (2,4; 0,8; 0).$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (3, -1, 5) - (2,4; 0,8; 0) = (0,6; -1,8; 5).$$

**F3.** Számítsuk ki az  $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$  és  $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$  vektorok vektoriális szorzatát.

**M3.**  $(1, 3, -2) \times (-1, 2, 0) = (3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2, (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 0, 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = (4, 2, 5)$ .

**F4.** Számítsuk ki az  $A(-1, 0, 2)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(3, 2, 1)$  csúcspontú háromszög területét.

**M4.** Legyen  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (3, 1, -2)$  és  $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (4, 2, -1)$ . Az  $ABC$  háromszög területe fele a  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  által kifeszített paralelogramma területének. Utóbbi pontosan a  $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (3, -5, 2)$  vektor hossza, ami  $\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$ . Így a háromszög területe  $\frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3,08$ .

**F5.** Határozzuk meg az  $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$  és  $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$  vektorok  $\mathbf{abc}$  vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

**M5.**  $\mathbf{abc} = 2 \cdot 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0 + 0 - 10 - 0 + 3 - 16 = -23$ . Az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata ennek abszolút értéke, azaz 23.

**F6.** Írjuk fel a  $P_0(1, 2, 4)$  ponton átmenő  $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$  normálvektorú sík egyenletét.

**M6.** Az  $\mathbf{n}$  normálvektorú sík egyenlete  $2x + y + 3z = c$ , ahol a  $c$  konstans úgy határozzuk meg, hogy a  $P_0$  pont rajta legyen a síkon. Azaz  $c = 2 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 4 = 16$ , így a kérdéses sík egyenlete  $2x + y + 3z = 16$ .

**F7.** Írjuk fel a  $P(3, 4, 6)$  ponton átmenő  $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$  normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a  $Q(-1, 5, 4)$  pontnak ettől a síktól vett távolságát.

**M7.** A sík egyenlete az előző feladathoz hasonlóan:  $x - 2y + z = 1$ . Ennek a Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{x - 2y + z - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = 0.$$

A  $Q$  pontnak ettől a síktól való távolságát a hasonló formulából számolhatjuk:

$$\left| \frac{-1 - 2 \cdot 5 + 4 - 1}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-8}{\sqrt{6}} \right| = \frac{8}{\sqrt{6}} \approx 3,27.$$

**F8.** Írjuk fel a  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$  és  $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 3)$  vektorokkal párhuzamos, a  $P(2, 3, 7)$  ponton átmenő sík egyenletét.

**M8.** Mivel a vektoriális szorzat a két tényezőre merőleges vektor, így ezen sík egy normálvektora a  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (10, -5, 0)$  vektor. Így a sík egyenlete  $10x - 5y = 5$ , amivel ekvivalens, hogy  $2x - y = 1$ .

**F9.** Mutassuk meg, hogy a  $3x + y - z = 1$  és a  $6x + 2y - 2z = 1$  egyenletű síkok párhuzamosak, és határozzuk meg a két sík távolságát.

**M9.** Az első sík normálvektora  $\mathbf{n}_1 = (3, 1, -1)$ , míg a másodiké  $\mathbf{n}_2 = (6, 2, -2)$ . Látható, hogy  $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$ , azaz a két sík valóban párhuzamos. A két sík távolságának a kiszámításához válasszunk egy  $Q$  pontot az első síkról. Legyen mondjuk  $Q(0, 1, 0)$ , mert ez rajta van a síkon, kielégíti az egyenletet:  $3 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$ . A két párhuzamos sík távolsága a  $Q$  pont távolsága a második síktól, ami

$$\left| \frac{6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{44}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{11}} \approx 0,151.$$

### Gyakorló feladatok végeredményei

**M12.**  $\mathbf{v}_{\parallel} = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{v}_{\perp} = (2, 3, 8)$

**M13.** Sík egyenlete:  $2x + 3y - 4z = -5$ . Pont távolsága:  $\frac{10}{\sqrt{29}} \approx 1,86$ .