

3. gyakorlat megoldásai

Lineáris összefüggőség. Mátrixok

- F1.** Írjuk fel azt az egyenest paraméteres és egyenletrendszeres alakban is, amely átmege az $A(3, 1, 2)$ és $B(-1, 1, 3)$ pontokon.
- M1.** Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (-4, 0, 1)$, egy tartópontja pedig például az A pont, így a paraméteres alak $x = 3 - 4t$, $y = 1$, $z = 2 + t$. Az egyenletrendszeres alaknál figyelembe véve azt, hogy az irányvektor második koordinátája 0: $\frac{x-3}{-4} = z-2$ és $y = 1$.
- F2.** Adjuk meg az $e : x = 1 + t; y = 4 - t; z = 3 + 2t$ és $f : x = -1 + 2t; y = 7 - 3t; z = 4 - t$ egyenesek metszéspontját, ha létezik.
- M2.** Először is vegyük észre, hogy a két egyenesben lévő t nem ugyanaz, csak egy egyenesen belül kell ugyanannak lennie. Így inkább írjuk is át az egyiket, hogy ne zavarjon: $e : x = 1 + t; y = 4 - t; z = 3 + 2t$ és $f : x = -1 + 2s; y = 7 - 3s; z = 4 - s$. A két egyenesnek metszéspontja van, ha találunk olyan s és t értékeket, melyekre mindhárom koordináta egyezik. Ehhez vegyük először az első két koordináta egyenlőségét: $x : 1 + t = -1 + 2s$ és $y : 4 - t = 7 - 3s$. Az első egyenletből $t = 2s - 2$, amit beírva a második egyenletbe: $4 - 2s + 2 = 7 - 3s$, amiből $s = 1$ és így $t = 0$ adódik. Ez még nem garantálja a metszéspont létezését, csak ha a harmadik koordináta is egyezik: Ha e -ben $t = 0$, akkor $P_1(1, 4, 3)$ és f -ben $s = 1$ esetén $P_2(1, 4, 3)$, ami azt jelenti, hogy a két pont egybeesik, így metszőek és a metszéspont koordinátái $P(1, 4, 3)$.
- F3.** Igazoljuk, hogy az $e : \frac{x-1}{3} = \frac{2y}{5} = -\frac{z+1}{3}$ és $f : x = t; y = 2t - 3; z = -5$ egyenesek kitérőek, továbbá adjuk meg hajlásszögüket.
- M3.** Felírva az e paraméteres alakját, hasonló módon megoldhatjuk a feladatot, mint az előzőt, csak most azt látnánk, hogy a pontok utolsó koordinátája eltérne. Egy másik megoldás az, hogy keressük a f egyenes azon pontját (t az ismeretlen), amely kielégíti az e egyenletét is. Ehhez beírjuk a megfelelő koordinátákat: $\frac{t-1}{3} = \frac{4t-6}{5} = \frac{4}{3}$. Mivel $\frac{t-1}{3} = \frac{4}{3}$, ezért t -nek 5-nek kell lennie, de ha $t = 5$, akkor $\frac{4t-6}{5} = \frac{14}{5} \neq \frac{4}{3}$, tehát nincs az f -nek olyan pontja, ami kielégíti az e egyenest, azaz nem metszőek. Lehetnek még párhuzamosak is, ehhez (és a hajlásszöghöz is) kellene az irányvektorok. $\mathbf{v}_e = (3, \frac{5}{2}, -3)$ és $\mathbf{v}_f =$

$(1, 2, 0)$. Mivel nem egymás számszorosai, ezért nem párhuzamosak. Az egyenesek szöge pedig megegyezik az irányvektoraik szögével: $\phi = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_e \mathbf{v}_f}{|\mathbf{v}_e||\mathbf{v}_f|}\right) = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{24} \cdot 25\sqrt{5}}\right) \approx 43,4^\circ$

F4. Döntsük el, hogy a következő \mathbb{R}^3 -beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

M4. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségéből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

(a) A

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1$, melyet a másik kettő egyenletbe írva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az első (-3) -szorososa, tehát ez tulajdonképpen csak egy egyenlet. Ennek egy (nemnulla) megoldása például a $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = -1$. Ekkor $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 3$. Ellenőrizhető, hogy ez az eredeti egyenletrendszer megoldása is, azaz

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mely mutatja, hogy ezen vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz lineárisan összefüggők.

(b) A

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből az első egyenlet kétszeresét kivonva kapjuk, hogy $-\lambda_2 = 0$, azaz $\lambda_2 = 0$. Ekkor a második egyenletből $2\lambda_3 = 0$, azaz $\lambda_3 = 0$. Ekkor az első egyenletet felhasználva kapjuk, hogy $\lambda_1 = 0$. Tehát (??)-ből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ami azt jelenti, hogy ezen vektorok lineárisan függetlenek.

F5. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

M5. Az $m_1 \times k_1$ -es és az $m_2 \times k_2$ -es mátrixokat pontosan akkor tudjuk összeszorozni, ha $k_1 = m_2$. Mivel az \mathbf{A} mátrix 2×2 -es, a \mathbf{B} 3×2 -es, a \mathbf{C} 2×3 -as, és a \mathbf{D} 3×1 -es, így az \mathbf{AC} , \mathbf{BA} , \mathbf{BC} , \mathbf{CB} , \mathbf{CD} szorzatok értelmesek. Ezek eredménye:

$$\begin{aligned} \mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ -4 & -2 & -8 \end{bmatrix}, & \mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{BC} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{CB} &= \begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, & \mathbf{CD} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A mátrixok transzponáltjai:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = [2 \quad -2 \quad 1].$$

F6. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} eleme jelentse az i -edik gyárban egy nap alatt előállított j -edik termék számát. A

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor j -edik komponense a j -edik termék egységára. Mekkora az egy nap alatt előállított termelési érték gyáranként?

M6. Az első gyár termelési adatait az \mathbf{A} mátrix első sora adja meg. Ezen adatokat kell beszorozni a megfelelő egységárral, majd ezeket összeadni, tehát az első gyár termelési értéke

$$4 \cdot 40 + 0 \cdot 60 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 20 = 450.$$

Hasonlóan a második gyáré:

$$2 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 3 \cdot 50 + 0 \cdot 20 = 290,$$

míg a harmadiké:

$$5 \cdot 40 + 6 \cdot 60 + 2 \cdot 50 + 4 \cdot 20 = 740.$$

Ezen számítások pontosan az $\mathbf{A}\mathbf{p}$ mátrixszorzat komponensei, így tulajdonképpen ezt kell kiszámolni:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 290 \\ 740 \end{bmatrix}.$$

F7. Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az \mathbf{A} mátrix a_{ij} eleme jelentse a j -edik termék i -edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A \mathbf{p} vektor p_i komponense jelölje az i -edik termék egységárát. Az \mathbf{A} mátrix, a \mathbf{p} vektor, az \mathbf{e}_i (a kanonikus bázisvektor), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel:

- (a) a havi bevételt boltonként;
- (b) az r -edik bolt havi bevételét;
- (c) az r -edik boltban a q -edik áruból eladott mennyiséget;
- (d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;
- (e) a havi összbevételt.

M7. (a) Az előző feladathoz hasonlóan $\mathbf{A}\mathbf{p}$, melynek a komponensei adják meg az egyes boltok bevételeit.

(b) Ha csak az r -edik bolt bevételére vagyunk kíváncsiak, akkor az előzőt balról meg kell szorozni az \mathbf{e}_r bázisvektor transzponáltjával: $\mathbf{e}_r^T \mathbf{A}\mathbf{p}$.

(c) Ez pontosan az \mathbf{A} mátrix a_{rq} eleme. Ezt a bázisvektorok segítségével a következőképpen írhatjuk fel: $\mathbf{e}_r^T \mathbf{A}\mathbf{e}_q$.

(d) Ezt úgy kapjuk, hogy összeadjuk az \mathbf{A} mátrix sorait. Ezt az $\mathbf{1}$ oszlopvektor transzponáltjával való beszorzással érjük el: $\mathbf{1}^T \mathbf{A}$.

(e) Az előző mennyiséget kell az egységárakkal beszorozni: $(\mathbf{1}^T \mathbf{A})\mathbf{p}$, avagy a boltonkénti havi bevételt összegezni: $\mathbf{1}^T (\mathbf{A}\mathbf{p})$, mely két szorzat megegyezik a mátrixszorzás asszociativitása miatt.