4. gyakorlat megoldásai
Lineáris egyenletrendszerek

F1. Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval, majd az együtthatómátrix invertálásával is.

M1. Az egyenletrendszer mátrixát sortranszformációkkal alakítjuk:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \overset{s_2-2s_1}{\underset{s_3-4s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \overset{s_3+3s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \overset{s_3/(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{s_1-2s_3}{\underset{s_2-\frac{2}{3}s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Tehát a megoldás: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$.

Az inverzmátrixot hasonló számolással kapjuk, csak kezdetben a jobb oldalon nem az egyenletek jobb oldala, hanem az egységmátrix van:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2-2s_1}{\underset{s_3-4s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3/(-2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{s_1-2s_3}{\underset{s_2-\frac{2}{3}s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

És ezzel a megoldás:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

azaz $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$.

F2. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = 2 \\ 9x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = 5 \\ x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & + & 2x_5 & = 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = 2 \end{array}$$

egyenletrendszert.

M2. Az előző feladathoz hasonlóan:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2-9s_1 \\ \sim \\ s_3-3s_1 \\ s_4-s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2 \leftrightarrow s_4}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 10 & -2 & 8 & -20 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3-4s_2 \\ \sim \\ s_4-10s_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 18 & -30 & -9 \end{array}\right] \overset{s_4-3s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right] \overset{s_2+\frac{1}{2}s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right] \overset{s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right].$$

Mivel a 4. és 5. oszlopban nincs sor eleji egyes (vezéregyes), így ezek szabad változók (értéküket tetszőlegesen megválaszthatjuk), és ezek függvényében határozzuk meg a többi ismeretlen értékét. Az első egyenlet szerint $x_1 + x_4 - 2x_5 = 0$, azaz $x_1 = -x_4 + 2x_5$. A második egyenletből $x_2 = -1 - 2x_4 + 4x_5$, míg a harmadik egyenletből $x_3 = -3 - 6x_4 + 10x_5$.

F3. A p és a q valós paraméter függvényében adjuk meg az

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}$$

egyenletrendszer összes valós megoldását, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2q \\ 4q \\ q \end{bmatrix}.$$

M3. Ha $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, akkor az $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}$ egyenlet azt jelenti, hogy

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q & 4q & q \end{bmatrix},$$

ami a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2q \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4q \\ 3x_1 - 2x_2 + px_3 &= q. \end{aligned}$$

Ezt Gauss-eliminációval oldhatjuk meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 2 & -3 & 2 & 4q \\ 3 & -2 & p & q \end{array}\right] \overset{s_2-2s_1}{\underset{s_3-3s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & -5q \end{array}\right] \overset{s_2/(-5)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & -5q \end{array}\right] \overset{s_3+5s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-3 & -5q \end{array}\right].$$

Ha $p \neq 3$, akkor $x_3 = -\frac{5q}{p-3}$, $x_2 = 0$, és az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 2q - x_3 = 2q + \frac{5q}{p-3}$.

Ha $p = 3$ és $q \neq 0$, akkor nincs megoldás.

Ha $p = 3$ és $q = 0$, akkor végtelen sok megoldás van, és x_3-at választhatjuk szabad paraméternek. Ekkor $x_2 = 0$ és $x_1 = 2q - x_3$.

Gyakorló feladatok végeredményei

M4. (a) nincs megoldás; (b) $x = -1, y = 2, z = 0$.

M5. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 5 \end{bmatrix}$