6. gyakorlat megoldásai
Mátrixegyenletek, transzformációk, sajátértékek és sajátvektorok

F1. Határozzuk meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, melyre teljesül, hogy

$$\mathbf{B}\,(2\mathbf{X}+\mathbf{A})=\mathbf{X},$$

ahol

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & -4 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

M1. A mátrixegyenletet kicsit átrendezzük (az 1-et nem tudjuk kivonni a $2\mathbf{B}$-ből, csak az egységmátrixot):

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\,(2\mathbf{X}+\mathbf{A})&=\mathbf{X}\\ 2\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}&=\mathbf{X}\\ 2\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}-\mathbf{X}&=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\\ (2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)\cdot\mathbf{X}&=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\\ \mathbf{X}&=(2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)^{-1}\,(-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\end{aligned}$$

A $2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ mátrix inverzéhez ki kell számolnunk a determinánst: $\det(2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)=-1$ és az aldeterminánsok mátrixát (melynek elemei a megfelelő sor és oszlop elhagyásával kapott 2×2-es mátrix determinánsa):

$$\begin{bmatrix}-7 & -10 & -6\\ 2 & 3 & 2\\ 8 & 12 & 7\end{bmatrix}.$$

Ezt még transzponálni, majd a sakktáblaszabály szerint bizonyos elemeit meg kell szorozni -1-gyel, és végül a determinánssal osztani:

$$\begin{bmatrix}-7 & -10 & -6\\ 2 & 3 & 2\\ 8 & 12 & 7\end{bmatrix}\underset{\text{ponálás}}{\overset{\text{transz-}}{\rightsquigarrow}}\begin{bmatrix}-7 & 2 & 8\\ -10 & 3 & 12\\ -6 & 2 & 7\end{bmatrix}\underset{\text{tábla}}{\overset{\text{sakk-}}{\rightsquigarrow}}\begin{bmatrix}-7 & -2 & 8\\ 10 & 3 & -12\\ -6 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{osztás}}{\overset{\text{det-tel}}{\rightsquigarrow}}\begin{bmatrix}7 & 2 & -8\\ -10 & -3 & 12\\ 6 & 2 & -7\end{bmatrix}.$$

Innentől csak a mátrixokat kell a megfelelő sorrendben összeszorozni:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = (2\mathbf{B}-\mathbf{E}_3)^{-1}(-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -8 \\ -10 & -3 & 12 \\ 6 & 2 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -2 \\ 4 & 10 & 2 \\ -4 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

F2. Írjuk fel annak a térbeli transzformációnak a mátrixát, mely az xy koordinátasíkra tükröz, majd az y-tengely körül 45°-kal forgat, végül yz koordinátasíkra vetít.

M2. Első lépésben meg kell határoznunk a feladatban szereplő három különböző transzformáció mátrixát. Ha ez megvan, össze fogjuk őket szorozni a megfelelő sorrendben. Ahhoz hogy egy transzformáció mátrixát felírhassuk, meg kell határoznunk a bázisvektorok képét:

1. xy koordinátasíkra tükrözés
   Az xy síkban minden vektor fixen marad, így az x és y irányíú bázisvektorok is és a rá merőleg z irányú pedig éppen az ellentetjébe megy át:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Tehát a xy koordinátasíkra tükrözés mátrixa: $\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. y-tengely körüli 45°-os forgatás
   Az y irányíú egységvektor helyben marad, míg az xz síkban lévő x és z irányú vektorok maradnak az xz síkban, csak elfordulnak. Figyelni kell a jobbkézszabály segítségével megállapított irányra!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ 0 \\ -\sin 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin 45^\circ \\ 0 \\ \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

3. yz koordinátasíkra vetítés
A vetítés során gyakorlatilag az első koordinátákat nullázzuk, így a yz koordinátasíkban minden vektor képe megegyezik önmagukkal, míg az x irányú egységvektor képe a nullvektor lesz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a xy koordinátasíkra tükrözés mátrixa: $\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A végső transzformáció mátrixának megállapításához fordított sorrendben kell őket összeszorozni, azaz

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

F3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

M3. (a) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 6 = \lambda^2 - 7\lambda - 8,$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = -1$. Egy λ sajátértékhez a sajátérvektort az $A - \lambda E_n = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a $\lambda_1 = 8$ esetén a következő:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = 2x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2t_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \mid t_1 \neq 0 \right\}.$$

A $\lambda_2 = -1$ esetben hasonlóan számolhatunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/6}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} : t_2 \neq 0 \right\}.$$

(b) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 + 10 + 10(1-\lambda) +$$
$$+ 2(-3-\lambda) - 2(4-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12 + 14 + 10 - 10\lambda - 6 - 2\lambda - 8 + 2\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Ennek a racionális gyökei a -2 osztói közül kerülnek ki, így próbálgatással azt találjuk, hogy $\lambda_1 = 1$ gyök, melyet így kiemelhetünk:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökei: $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 2$. Tehát a mátrix sajátértékei: $1, -1, 2$. A sajátértékekhez a sajátvektorokat hasonlóan számolhatjuk, mint az (a) feladatban:

$\lambda_1 = 1$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 \\ t_1 \end{bmatrix} : t_1 \neq 0 \right\}.$$

Hasonlóan $\lambda_2 = -1$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-5s_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/12}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-6s_2}{\overset{s_1+2s_2}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $x_2 = 0$, és x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = x_3$. Így a $\lambda_2 = -1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} t_2 \\ 0 \\ t_2 \end{bmatrix} : t_2 \neq 0 \right\}.$$

Végül $\lambda_3 = 2$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $x_3 = 0$ és x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$. Így a $\lambda_3 = 2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -t_3 \\ t_3 \\ 0 \end{bmatrix} : t_3 \neq 0 \right\}.$$

F4. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort.

M4. Ha λ_1 a $\mathbf{v}_1$ sajátvektorhoz tartozó sajátérték, akkor $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a+8 \end{bmatrix},$$

amiből $\lambda_1 = 3$, és ekkor $a + 8 = 3 \cdot 2$, amiből $a = -2$. Innen az előző feladathoz hasonlóan kiszámolhatjuk az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit:

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot (-2) = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

melynek a másik gyöke: $\lambda_2 = 8$. Ehhez sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2+2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

Megjegyzés: lehet tudni, hogy a (főátlóra) szimmetrikus mátrixok sajátvektorai merőlegesek egymásra, tehát ha ismerjük a $\mathbf{v}_1$-et, akkor $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$, melynek segítségével az $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$ egyenletből megkaphatjuk, hogy $\lambda_2 = 8$.

F5. Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

M5. A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 0 - 2\lambda - 2(-1-\lambda) - 0 =$$
$$= \lambda(\lambda+1)(2-\lambda).$$

Nem kell elvégeznünk a szorzást, mert már ebből látszik, hogy a három sajátérték: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. A hozzájuk tartozó sajátvektorokat a 3. feladathoz hasonlóan számítjuk ki:

$\lambda_1 = 0$ esetén:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1+s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát x_2 szabad paraméter és $x_1 + 2x_2 = 0$, tovább $x_3 = 0$, tehát a $\lambda_1 = 0$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{bmatrix} : t_1 \neq 0 \right\}.$$

$\lambda_2 = -1$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_2}{\overset{s_1+2s_2}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát x_3 szabad paraméter és $x_1+x_3 = 0$, tovább $x_2+x_3 = 0$, tehát a $\lambda_2 = -1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -t_2 \\ -t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} : t_2 \neq 0 \right\}.$$

$\lambda_3 = 2$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1+3s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1+2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát x_2 szabad paraméter és $x_1 + 2x_2 = 0$, tovább $-2x_2 + x_3 = 0$, tehát a $\lambda_3 = 2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2t_3 \\ t_3 \\ 2t_3 \end{bmatrix} : t_3 \neq 0 \right\}.$$

Gyakorló feladatok

F6. Írjuk fel annak a térbeli transzformációnak a mátrixát, mely az x koordinátatengely irányába kétszeresére nyújt, majd az x-tengely körül 90°-kal forgat.

M6.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F7. Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.