7. gyakorlat megoldásai
Komplex számok

F1. Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 1 - 3i$. Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}, \qquad \overline{z_1}, \qquad |z_1|.$$

M1. A szorzásnál használjuk, hogy $i^2 = -1$, míg az osztásnál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (3+2i) + (1-3i) = (3+1) + (2-3)i = 4 - i,\\
z_1 - z_2 &= (3+2i) - (1-3i) = (3-1) + (2-(-3))i = 2 + 5i,\\
z_1 z_2 &= (3+2i)\cdot(1-3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 9 - 7i,\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3+2i}{1-3i} = \frac{(3+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{3+9i+2i+6i^2}{1+3i-3i-9i^2} = \frac{-3+11i}{10} = -0{,}3 + 1{,}1i,\\
\overline{z_1} &= 3 - 2i,\\
|z_1| &= \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}.
\end{aligned}$$

F2. Legyen $z = -1 + i$. Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és a harmadik gyökeit.

M2. A $z = -1 + i$ komplex szám abszolútértéke: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ és argumentuma:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

ahol a $+\pi$ tag azért kell, mert $\mathrm{Re}z = -1 < 0$. Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2}\,(\cos(135°) + i\sin(135°)).$$

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned}
z^4 &= \left(\sqrt{2}\right)^4 (\cos(4\cdot 135°) + i\sin(4\cdot 135°)) = 4\,(\cos(540°) + i\sin(540°)) =\\
&= 4\,(\cos(180°) + i\sin(180°)) = -4
\end{aligned}$$

A z komplex számnak három z_1, z_2, z_3 köbgyöke van:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135°}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\,(\cos(45°) + i\sin(45°)) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i,\\
z_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135°+360°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135°+360°}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\,(\cos(165°) + i\sin(165°)),\\
z_3 &= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{135°+720°}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135°+720°}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\,(\cos(285°) + i\sin(285°)).
\end{aligned}$$

F3. Számoljuk ki az $\sqrt{3}-i$ komplex szám tizenegyedik hatványát (az eredményt algebrai alakban adjuk meg).

M3. A $z=\sqrt{3}-i$ komplex szám abszolútértéke: $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$ és argumentuma:

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow \arg z=\frac{11\pi}{6},$$

Így a trigonometrikus alak:

$$z=2\left(\cos(330^\circ)+i\sin(330^\circ)\right).$$

$z^{11}=2^{11}(\cos(3630^\circ)+i\sin(3630^\circ))=2048(\cos(30^\circ)+i\sin(30^\circ))=1024\sqrt{3}+1024i$

.

F4. Keressük meg a $z^2-6z+13=0$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

M4. Bár ennek a másodfokú egyenletnek negatív a diszkrimánsa, és így nincsenek valós gyökei, a komlex számok körében van két gyöke, melyet a szokásos megoldóképlettel számolhatunk:

$$z_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 13}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6\pm 4i}{2}=3\pm 2i,$$

ahol felhasználtuk, hogy pozitív q valós szám esetén $\sqrt{-q}=\sqrt{q}i$.

F5. Keressük meg a $z^4-z^2-6=0$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

M5. Mivel a polinomnak csak páros fokszámú tagjai vannak, ezért vezessük be a $w=z^2$ új változót, ekkor $w^2-w-6=0$ már egy másodfokú egyenlet, melyre a szokásos megoldóképletet alkalmazhatjuk:

$$w_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\to w_1=3, w_2=-2,$$

amiből gyökvonással adódik: $z_1=\sqrt{3}$, $z_2=-\sqrt{3}$, $z_3=\sqrt{2}i$ és $z_4=-\sqrt{2}i$.